МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕРЖАВНИЙ ВИЩИЙ НАВЧАЛЬНИЙ ЗАКЛАД
«ПРИДНІПРОВСЬКА ДЕРЖАВНА АКАДЕМІЯ БУДІВНИЦТВА
ТА АРХІТЕКТУРИ»

КАФЕДРА МЕНЕДЖМЕНТУ, УПРАВЛІННЯ ПРОЕКТАМИ
І ЛОГІСТИКИ

МЕТОДИЧНІ ВКАЗІВКИ
щодо проведення практичних занять з дисципліни
«ОПТИМІЗАЦІЯ ЛОГІСТИЧНИХ РІШЕНЬ»

для студентів ступеня магістра спеціальності 073 «Менеджмент» за освітньо-професійною програмою «Логістика»
денної та заочної форм навчання

м. Дніпро
2018 р.

Методичні вказівки щодо проведення практичних занять з дисципліни «Оптимізація логістичних рішень» для студентів ступеня магістра спеціальності 073 «Менеджмент» за освітньо-професійною програмою «Логістика» денної та заочної форм навчання / Укладач: Черчата А. О. – Дніпро: ДВНЗ «ПДАБА», 2018. - 61 с.

Методичні вказівки містять розрахункові завдання та пояснення щодо їх виконання. Розв'язання практичних завдань сприятиме формуванню навичок прийняття управлінських рішень.

Методичні вказівки можуть бути корисними для студентів, що навчаються та студентів-дипломантів вищих навчальних закладів, що дипломують за спеціальністю «Менеджмент» ОПП «Логістика». Дані методичні рекомендації можуть бути використані для крупних та середніх оптових підприємств, які застосовують та впроваджують (або ще планують) прогресивну концепцію інтегрованої логістики, що має позитивне визнання в розвинених країнах.

Укладач: Черчата А. О., кандидат економічних наук, доцент кафедри менеджменту, управління проектами і логістики ДВНЗ «ПДАБА».

Відповідальний за випуск: Вечеров В. Т. доктор технічних наук, професор, зав. кафедри менеджменту, управління проектами і логістики ДВНЗ «ПДАБА».

Рецензент: Млодецький В. Р., доктор технічних наук,, професор кафедри менеджменту, управління проектами і логістики ДВНЗ «ПДАБА».

Затверджено на засіданні кафедри
менеджменту, управління проектами
і логістики ДВНЗ ПДАБА
Протокол №4 від 21.11.18 р.
Зав. кафедри МУПіЛ Вечеров В. Т.

ЗМІСТ

ЗАГАЛЬНІ ПОЛОЖЕННЯ

Практичні заняття з дисципліни «Оптимізація логістичних рішень» є однією із складових частин навчального процесу у підготовці магістрів з логістики.

Мета практичних занять з дисципліни: закріпити, систематизувати і поглибити теоретичні знання студентів, одержані у процесі вивчення ключових розділів дисципліни, дати студентам уявлення про методологію підготовки та реалізації логістичних рішень, способи та засоби залучення ресурсів для реалізації цих рішень. У процесі вивчення предмету студенти набудуть теоретичних знань і навичок у сфері логістики.

У результаті виконання практичних завдань студенти одержать необхідні практичні навички щодо таких поставлених перед ними завдань:

- вирішити поставлені задачі за допомогою методів лінійного програмування використовуючи представлену методику.
- розрахувати логістичні витрати і фінансовий результат від закупівлі і реалізації товарів. Обґрунтувати пропозиції, спрямовані на зниження витрат і підвищення ефективності закупівельної діяльності торгового підприємства.
- виконати аналіз структури логістичних витрат, виявити найбільш прибуткові і збиткові види товарів і підготовити пропозицій по управлінню запасами товарів на складі (витрати на підтримку запасів) і оптимізації постачань цих товарів
- використання методу місій з метою оптимізації закупівель
- аналіз систем масового обслуговування
- складання, аналіз і оптимізація сітьових графіків виконання комплексу робіт

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 1. Розробка та розв'язання графоаналітичним методом математичної моделі лінійного програмування

Мета: придбати практичні навички складання математичної моделі задачі лінійного програмування та її розв'язання графоаналітичним методом.

Завдання:

1. Ознайомитись з постановкою задачі лінійного програмування.
2. Ознайомитись з графоаналітичним методом розв'язання задач лінійного програмування.
3. Вирішити поставлену задачу лінійного програмування використовуючи представлену методику.

1. Постановка задачі лінійного програмування

Ці задачі займають в дослідженні операцій одне з головних місць через їх широке застосування у практиці. Шляхи вирішення подібних задач так чи інакше пов'язані з плануванням деяких заходів, що здійснюватимуться у майбутньому (від англійського programming - складання плану, програми дій).

Постановка задачі

Незважаючи на те, що клас задач, що вирішуються дуже широкий, усі вони можуть бути формально зведені до наступного формулювання:

Знайти значення змінних x_1; x_2;...x_n (що представляють собою елементи рішення), які забезпечують максимум (мінімум) заданої скалярної лінійної функції (цільової функції або функції мети)

$$L = \sum_{j}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min), \tag{1.1}$$

де c_j - коефіцієнти впливу елементів рішення $x_j \; \left(j = \overline{1,n}\right)$ на значення цільової функції, при деяких обмеженнях на значення змінних $x_j \; \left(j = \overline{1,n}\right)$, відповідно заданих системою нерівностей:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot x_{ij} \le b_i \; (i = 1,2,...,m) \tag{1.2}$$

де n - число елементів рішення; m - число обмежень; a_{ij} - деякі постійні коефіцієнти; b_i - значення i-го обмеження. Слід відзначити, що саме лінійна форма цільової функції (1.1) та обмежень (1.2) і обумовила назву "лінійне програмування". Відзначимо також, що в класичній постановці на значення змінних x_j завжди додатково накладаються вимоги $x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n}\right)$.

2. Графоаналітичний метод розв'язання задач лінійного програмування

На відміну від звичайної системи рівнянь, у якій число змінних дорівнює числу рівнянь, задачі лінійного програмування (ЛП) мають справу з системою, у якій число рівнянь може бути меншим за число невідомих і тому у загальному випадку число рішень може бути нескінченним. Із цієї множини потрібно вибрати оптимальне рішення. Множина, елементами якої є точки, називається *точковою множиною.* Приклади множини на площі: трикутник, кут, точки прямої лінії, відрізок, коло, сектор. Приклади у просторі *X, Y, Z:* куля, куб, призма, паралелепіпед. У задачах ЛП ми розглядаємо точкові множини.

Множина точок називається *випуклою,* якщо сумісно з його будь-якими двома точками множині належить і весь відрізок прямої лінії, який з'єднує ці дві точки. В іншому випадку множина не є випуклою (рис. 1.1).

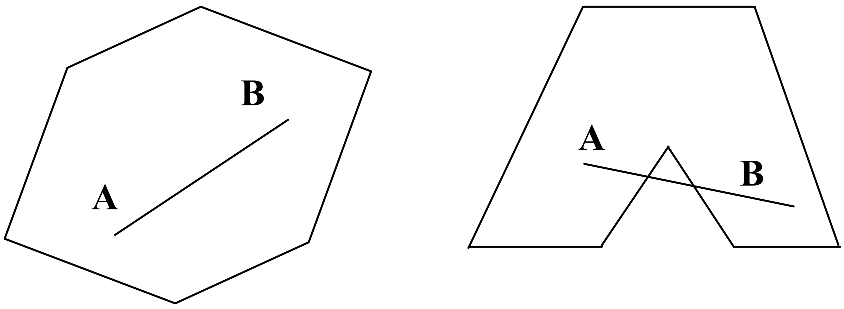


Рис. 1.1. Випукла і невипукла множини

Розглянемо задачу ЛП у вигляді:

$$F = x_1 + x_2 \to \max;$$
$$2x_1 - 5x_2 + 10 \geq 0;$$
$$3x_1 + 4x_2 - 12 \leq 0;$$
$$x_1 \geq 0; \quad x_2 \geq 0.$$

Перетворимо нерівності у рівності для будування граничних прямих:

$$2x_1 - 5x_2 + 10 = 0;$$
$$3x_1 + 4x_2 - 12 = 0.$$

для яких на площині x_1, x_2 побудуємо відповідні дві прямі лінії (рис. 1.2). Кожна з цих прямих ліній ділить площу x_1, x_2 на дві півплощини.

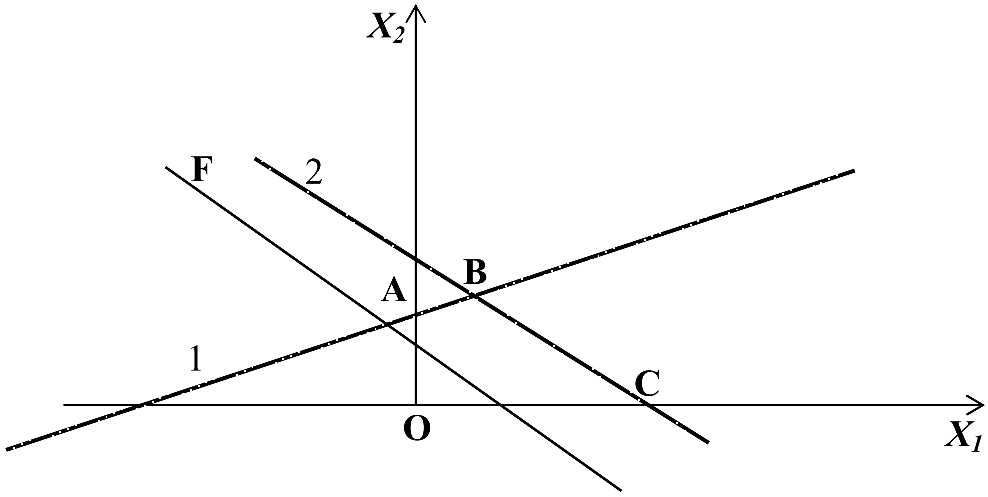


Рис. 1.2. Графоаналітичний метод розв'язання задачі ЛП

В результаті отримуємо багатокутник OABC, всередині або на межах якого знаходиться множина точок, яка відповідає вимогам обмежень-нерівностей. В цьому можна впевнитися, взявши будь-яку точку всередині або на межі багатокутника.

Але з цієї множини точок нам потрібна лише одна - у якій функція мети стає найбільшою. На рис. 1.2 функція мети показана у вигляді прямої лінії *F*, отриманої з рівняння $F = x_1 + x_2 = Z$, де Z - деяка постійна величина, яку ми намагаємось наблизити до максимально можливого значення. Припустимо, що на графіку рис. 1.2 ми провели пряму *F* для довільного значення величини *Z*. Очевидно, що якщо змінювати величину *Z,* то пряма *F* буде переміщуватись паралельно сама собі. З теорії задач ЛП відомо, що оптимальне значення функції мети знаходиться у кутовій точці. Переміщуємо функцію мети за межі отриманого багатокутника *OABC* таким чином, щоб вона пройшла лише через одну кутову точку, координати якої і є розв'язанням задачі ЛП. У даному випадку - це точка *C.*

Властивості випуклих множин:

1. Пересічення (загальна частина) двох випуклих множин є випуклою множиною.

2. Пересічення (загальна частина) кінцевої кількості випуклих множин є також випуклою множиною.

3. Кількість кутових точок *(A, B, C)* множини багатокутника співпадає з числом припустимих базисних рішень системи.

4. Множиною рішень системи лінійних рівнянь з двома змінними є випуклий багатокутник.

Основні теореми лінійного програмування:

Теорема 1. Множина всіх припустимих рішень системи обмежень задачі ЛП є випуклою.

Теорема 2. Якщо задача ЛП має оптимальне рішення, то воно співпадає з однією (двома) точкою із кутових точок (вершин) множини припустимих значень.

Теорема 3. Кожному припустимому базисному рішенню задачі ЛП відповідає кутова точка області припустимих рішень системи, і навпаки.

Примітка. Якщо кутовій точці відповідають два, три і т.д. базисні рішення, то всі вони будуть виродженими.

Висновок. Оптимальне рішення задачі ЛП співпадає з припустимим базисним рішенням системи обмежень. Тобто оптимальне рішення потрібно шукати серед кінцевого числа кутових точок (серед припустимих базисних рішень).

3. Завдання. Скласти математичну модель поставленої задачі та розв'язати графоаналітичним методом, перевірив отримане рішення за допомогою програмного забезпечення (Microsoft Office Excel/Сервіс/Пошук рішення) складеної задачі ЛП (N – порядковий номер студента у групі, 1 варіант – порядкові номера від 1 до 10, 2 варіант – порядкові номера від 11):

1 варіант. Розглянемо роботу ательє з пошиву костюмів. Необхідно визначити кількість костюмів при максимальному прибутку, за умови, що їх кількість буде не менша 10, а прибуток повинен бути більше 400 грн. Початкові дані наведені у таблиці 1.1.

Таблиця 1.1

Ресурси та норми витрат на випуск костюмів			
Вид ресурсу	Запаси ресурсів	Жіночій костюм	Чоловічій костюм
Матерія з вовни	20N м	3 м	4 м
Лавсан	30N м	2,5 м	3,5 м
Гроші	3000 грн.	2N грн..	3N грн..
Кількість виробів, грн.		x_1	x_2
Прибуток за один виріб, грн..		50 грн.	60 грн.

2 варіант. Розглянемо обробку деталей у цеху. Два вироби (B_1, B_2) обробляються послідовно на трьох верстатах. Кількість деталей B_1 не може бути меншою за кількість деталей B_2. Необхідно скласти план виробництва при максимальному прибутку. Початкові дані наведені у таблиці 1.2.

Таблиця 1.2

Дані по обробці деталей			
Верстат	Запаси ресурсів часу роботи верстатів, год.	Час обробки однієї деталі, год.	
		B_1	B_2
1	10N	1	2
2	15N	2	N/3(ціле значення)
3	50	N/2(ціле значення)	3
Кількість виробів, шт.		x_1	x_2
Прибуток за один виріб, грн./шт.		5 грн.	8 грн.

Контрольні питання:

1. Постановка задачі лінійного програмування.
2. Загальна задача лінійного програмування.
3. Задача лінійного програмування з обмеженням у вигляді нерівностей.
4. Графоаналітичний метод розв’язання задач лінійного програмування.
5. Методи розв’язання задач лінійного програмування.

Література [4, 5, 12]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 2. Формулювання та розв’язання задач лінійного програмування симплекс-методом

Мета: опанування методикою формалізації транспортних проблем, що підкоряються методам лінійного програмування.

Завдання:

1. Ознайомитись з елементами лінійної алгебри та задачами лінійного програмування.
2. Ознайомитись з методикою розв’язання задач лінійного програмування (метод послідовного перебору, симплекс-метод).
3. Вирішити поставлену транспортну задачу лінійного програмування використовуючи представлені методики.

1. Елементи лінійної алгебри та задачі лінійного програмування

Системи ***m*** лінійних рівнянь з ***n*** змінними має вигляд:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}, \quad (2.1)$$

або в більш короткому запису:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} = b_i \quad \left(i = \overline{1.m}\right) \quad (2.2)$$

Якщо ***m***=***n***, тобто кількість рівнянь в системі співпадає з кількістю змінних, то система має єдиний розв'язок $X=(x_1,x_2,...,x_n)$, за умови, що її визначник (детермінант) не дорівнює нулю $(\Delta \neq 0)$. Якщо ***m<n***, то система має безліч розв'язків, за умови рівності рангів матриці і її розширеної матриці $(rang(A)=rang(A,b)=R_s)$, де R_s — ранг системи. В цьому випадку говорять про сумісність системи. Числове значення рангу визначає число лінійно незалежних рівнянь в системі.

Визначення рангу.

Визначення рангу матриці зводиться до знаходження хоча б одного визначника підматриці найменшого серед усіх підматриць порядку відмінного від нуля, порядок якої і визначить числове значення рангу даної матриці. Наприклад, якщо визначники усіх підматриць 2-го порядку рівні 0, то переходимо до підматриць 3-го порядку і серед них шукаємо хоча б один визначних не рівний 0. якщо сере них немає жодного ненульового визначника, то переходимо до підматриць 4-го порядку і т.д...

Приклад.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 = -1 \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 - 5x_4 = -7 \\ 3x_1 - 7x_2 + x_3 - 5x_4 = -8 \end{cases}$$

Маємо матрицю системи:

$$A=\begin{pmatrix}1 & -4 & 2 & 0 & -1\\ 2 & -3 & -1 & -5 & -7\\ 3 & -7 & 1 & -5 & -8\end{pmatrix}$$

Візьмемо першу підматрицю 2-го порядку A_1^2 і обчислимо її визначник: $\Delta=\begin{Vmatrix}1 & -4\\ 2 & -3\end{Vmatrix}=1\cdot(-3)-2\cdot(-4)=5>0$. З першої ж спроби маємо ненульовий визначник. Переходимо до підматриць 3-го порядку і обчислення їх визначників за правилом трикутника:

$$\Delta_1=\begin{Vmatrix}1 & -4 & 2\\ 2 & -3 & -1\\ 3 & -7 & 1\end{Vmatrix}=1\cdot(-3)\cdot1+2\cdot(-7)\cdot2+(-4)\cdot(-1)\cdot3-3\cdot(-3)\cdot2-(-7)\cdot(-1)\cdot1-2\cdot(-4)\cdot1=0,$$

$$\Delta_2=\begin{Vmatrix}-4 & 2 & 0\\ -3 & -1 & -5\\ -7 & 1 & -5\end{Vmatrix}=(-4)\cdot(-1)\cdot(-5)+(-3)\cdot1\cdot0+2\cdot(-5)\cdot(-7)-(-7)\cdot(-1)\cdot0-1\cdot(-5)\cdot(-4)-$$

$$-(-3)\cdot2\cdot(-5)=0,$$

$$\Delta_3=\begin{Vmatrix}1 & -4 & 0\\ 2 & -3 & -5\\ 3 & -7 & -5\end{Vmatrix}=0,\quad \Delta_4=\begin{Vmatrix}1 & 2 & 0\\ 2 & -1 & -5\\ 3 & 1 & -5\end{Vmatrix}=0.$$

Маємо ***rang(A)=2***, оскільки всі визначники під матриць 3-го порядку рівні 0. Підрахуємо ранг розширеної матриці 3-го порядку:

$$\Delta_1=\begin{Vmatrix}1 & -4 & -1\\ 2 & -3 & -7\\ 3 & -7 & -8\end{Vmatrix}=0,\qquad \Delta_2=\begin{Vmatrix}1 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -7\\ 3 & 1 & -8\end{Vmatrix}=0,\qquad \Delta_3=\begin{Vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & -5 & -7\\ 3 & -5 & -8\end{Vmatrix}=0,$$

$$\Delta_4=\begin{Vmatrix}-4 & 2 & -1\\ -3 & -1 & -7\\ -7 & 1 & -8\end{Vmatrix}=0,\quad \Delta_5=\begin{Vmatrix}-4 & 0 & -1\\ -3 & -5 & -7\\ -7 & -5 & -8\end{Vmatrix}=0,\quad \Delta_6=\begin{Vmatrix}2 & 0 & -1\\ -1 & -5 & -7\\ 1 & -5 & -8\end{Vmatrix}=0.$$

Всі визначники підматриць 3-го порядку розширеної матриці рівні 0, значить ранг розширеної матриці даної системи менший за 3. Перевіримо визначники підматриць 2-го порядку розширеної матриці:

$$\Delta=\begin{Vmatrix}1 & -1\\ 2 & -7\end{Vmatrix}=1\cdot(-7)-2\cdot(-1)=-5\neq0$$

Далі перевіряти визначники немає сенсу, тобто ***rang(A,b)=2***. Значить ранг системи рівний 2, так як ***rang(A)=rang(A,b)=2***.

Якщо ***rang(A)≠rang(A,b)***, то система буде несумісною, тобто не матиме розв'язків; система сумісна, якщо ***rang(A)=rang(A,b)***. Коли в системі рівнянь більше, ніж величина рангу системи, то "зайві" рівняння є лінійно залежними від інших і ними можна знехтувати при розв'язку системи.

У випадку, коли ранг матриці співпадає з кількістю невідомих, то система має єдиний розв'язок; якщо кількість невідомих перевищує числове значення рангу системи, то вона має безліч розв'язків.

Задачі лінійного програмування

Якщо обмеження задаються у формі лінійних рівнянь, то в цьому випадку розв'язуванню підлягає так звана "загальна задача лінійного програмування" (ЗЗЛП). Якщо обмеження задаються у вигляді нерівностей, то мова йде про "задачу лінійного програмування з обмеженнями - нерівностями" (ЗЛПН).

Загальна задача лінійного програмування (ЗЗЛП)

Загальна задача ЛП (ЗЗЛП) характеризується наявністю цільової функції (2.3) при обмеженнях у вигляді системи ***m*** точних рівнянь типу (2.4):

$$L = \sum_{j}^{n} c_j \cdot x_j \to \max(\min) \tag{2.3}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{2.4}$$

Відмітимо можливість рішення ЗЗЛП або як пошук $x_j\ \left(j = \overline{1,n}\right)$, що забезпечує $L = \sum_{j}^{n} c_j \cdot x_j \to \min$, або можливо також здійснювати пошук $x_j\ \left(j = \overline{1,n}\right)$, що забезпечує $L' = -L = -\sum_{j}^{n} c_j \cdot x_j \to \max$. При цьому, як відомо, числові значення $x_j\ \left(j = \overline{1,n}\right)$ залишаються незмінними. Умовимось називати допустимим рішенням ЗЗЛП будь-яку сукупність $x_j \ge 0\left(j = \overline{1,n}\right)$, що задовольняють систему рівнянь обмежень (2.4). Оптимальним є рішення з сукупності допустимих, що задовольняє $L_{\min}\ \left(L'_{\max}\right)$.

Розглянемо перш за все питання про існування допустимих рішень, тобто що система (2.4) може бути розв'язана відносно змінних $x_j\ \left(j = \overline{1,n}\right)$.

Як приклад розглянемо систему рівнянь-обмежень виду:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = -1 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \end{cases}$$

Для цієї системи: $MC = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 & 1 \end{Vmatrix}$; $PMC = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & 3 & 1 & 0 \end{Vmatrix}$,

де МС - матриця системи; РМС - розширена матриця системи. Визначаємо $\boldsymbol{R_{мс}}$, який не має перевищувати числа рівнянь (***m***=3) або числа змінних (***n***=4), тобто $\boldsymbol{R_{мс} \le \min\{m,n\}}$. Починаємо з перевірки визначників 3-го порядку.

$\Delta_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \end{Vmatrix} = 0$; $\Delta_2 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{Vmatrix} = 0$; $\Delta_3 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \end{Vmatrix} = 0$, тобто $\boldsymbol{R_{мс}}<3$.

Перевіряємо визначники 2-го порядку.

$\Delta_4 = \begin{Vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{Vmatrix} = -2 \ne 0$, що означає, що $\boldsymbol{R_{мс}}$=2 і немає потреби перевіряти решту можливих визначників 2-го порядку.

Знаходимо $\boldsymbol{R_{рмс}}$, який також не має перевищувати трьох.

$$\Delta_1=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{matrix}\right\|=0;\quad \Delta_2=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 1 & 0\end{matrix}\right\|=0;\quad \Delta_3=\left\|\begin{matrix}1 & -1 & 2\\ 1 & 1 & -1\\ 3 & 1 & 0\end{matrix}\right\|=0,\quad \Delta_4=\left\|\begin{matrix}1 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -1\\ -1 & 3 & 0\end{matrix}\right\|=0,$$ тобто $R_{рмс}<3$.

Перевіряємо визначники 2-го порядку: $\Delta_5=\left\|\begin{matrix}-1 & 2\\ 1 & -1\end{matrix}\right\|=-1\neq 0$ означає, що $R_{рмс}=2$. У результаті дослідження визначників МС і РМС маємо загальний ранг системи $R_{мс}=2$. Це означає, що система рівнянь-обмежень має тільки два будь-яких незалежних рівняння-обмеження, тобто одне з трьох рівнянь має бути відкинуто як зайве. Дійсно, третє рівняння є лінійною комбінацією двох перших, тому воно має бути відкинуто.

Узагальнюючи сказане, можна стверджувати, що $R_c=min\ \{m,n\}$, де m – кількість незалежних рівнянь-обмежень, n - кількість змінних, що оптимізуються. Розглянемо ще один дуже важливий аспект проблеми ЛП: умов існування значної кількості допустимих рішень, серед яких треба шукати оптимальне.

1. Якщо $m=n$ $R_c=n$, то система рівнянь-обмежень має лише одне рішення, що задовольняє систему (2.4). В цьому випадку отримане рішення буде допустимим і оптимальним одночасно, про пошук якогось іншого, кращого рішення, не варто і казати.

2. Якщо $m<n$ (де m - кількість незалежних рівнянь-обмежень) і $R_c=m$, то система має безмежну кількість допустимих рішень, серед яких треба шукати оптимальне. В цьому випадку (n - R_c) змінних звуться вільними, а решта $R_c=m$ - базовими змінними. На практиці вільні змінні приймаються рівними нулю і визначаються базові змінні. Пошук оптимального рішення, що забезпечує мінімум цільової функції, здійснюється шляхом послідовного оновлення складу базового рішення за рахунок вільних змінних з послідуючим розрахунком поточного значення L. Склад m базових змінних та їх значення, що відповідають та задовольняють (2.4), визначають оптимальне рішення. Вищесказане дозволяє зробити важливий практичний висновок: пошук оптимального рішення ЗЗЛП можливий, якщо $m<n$, де m - кількість незалежних рівнянь-обмежень (при умові $R_{мс}=R_{рмс}=R_c=$**m**).

2. Методи розв'язання ЗЗЛП

Існує багато методів розв'язання ЗЗЛП, але найбільш поширеним і найбільшим придатним до використання при розрахунках на ЕОМ є симплекс-метод. Звертаємо увагу, що цей метод застосовується лише для ЗЗЛП або для ЗЛПН, трансформованої в ЗЗЛП. При цьому обов'язковою є вимога позитивності всіх $b_i\ \left(i=1,m\right)$. Однак у ряді випадків більш простим і продуктивним є метод послідовного перебору. Відзначимо, що він може бути застосованим безпосередньо для ЗЛПН. Тому розглянемо ці достатньо поширені методи.

2.1 Метод послідовного перебору

Цей метод застосовується, коли кількість змінних дорівнює двом (n=2), а кількість обмежень $m>n$. Таким чином, необхідно оптимізувати

$$L=c_1x_1+c_2x_2\rightarrow\min(\max) \tag{2.5}$$

при обмеженнях
$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2\leq b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2\leq b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2\leq b_m\end{cases}\quad m\geq 3 \tag{2.6}$$

Суттєвість методу полягає у наступному:

1. Вибираються будь-які 2 обмеження і розв'язуються як обмеження-рівняння, тобто:

$$\begin{cases}a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2\end{cases}$$

За допомогою, наприклад, правила Крамера знаходяться елементи рішення x_1 і x_2.

2. Отримані значення x_1 і x_2 застосовуються у решті обмежень. Якщо x_1 і x_2 задовольняють решту обмежень, то розраховується поточне значення цільової функції $\boldsymbol{L_1}$. Якщо отримані x_1 і x_2 не задовольняють будь-яке обмеження, вони відкидаються як недійсні.

3. Потім вибирається інша будь-яка пара обмежень і робиться теж саме. Отримана пара значень x_1 і x_2 перевіряється в решті обмежень і якщо вони задовольняються, знову розраховуються поточне значення $\boldsymbol{L_2}$. Якщо $\boldsymbol{L_2>L_1}$, то попереднє рішення відкидається, а залишається друге рішення і т.д. ...

4. Якщо при розрахунках будь-якої пари обмежень головний детермінант $\boldsymbol{\Delta}$=0, ця пара обмежень не застосовується для розрахунків x_1 і x_2, тому що в цьому випадку згідно з правилом Крамера:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} \to \infty; \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} \to \infty$$, що не задовольняє жодного обмеження.

Цей метод є достатньо простим і легко реалізується на ЕОМ, але він є обмеженим кількістю змінних, що оптимізується ($\boldsymbol{n}$=2).

2.2 Симплекс-метод

Основна ідея симплекс-методу полягає в поступовому переході від одного допустимого рішення до наступного таким чином, що кожного разу поточне значення цільової функції поступово зменшується (при пошуку мінімуму) і наближається після кількох ітерацій до оптимального значення. При пошуку максимуму цільова функція навпаки поступово збільшується. Відзначимо, що обмежень на кількість змінних не існує і розмірність задачі, що розв'язується, залежить лише від обсягу пам'яті ЕОМ, що була застосована для рішення. Слід пам'ятати, що цей метод застосовується лише для ЗЗЛП. Кількість можливих допустимих рішень залежить від числа змінних і від числа обмежень-рівнянь ($\boldsymbol{m}$):

$$N_{ріш} = C_n^m = \frac{n(n-1)(n-2)...[n-(m-1)]}{1 \cdot 2 \cdot 3 ... m} \quad (при\ m < n). \tag{2.7}$$

1. Число необхідних ітерацій при застосуванні симплекс-методу, що забезпечують пошук оптимуму

$$\frac{3m}{2} \le N_{ітер} \le 3m, \tag{2.8}$$

що дозволяє оцінити термін одержання кінцевого оптимального результату. Існує багато модифікацій цього методу, тому обмежимось лише тим, що застосовується найчастіше в ЕОМ. Маємо ЗЗЛП виду:

$$L = c_1x_1 + c_2x_2 + ... + c_nx_n \to \min(\max) \tag{2.9}$$

при обмеженнях
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + ... + a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}. \tag{2.10}$$

Алгоритм застосування даного методу:

1 .Здійснюється пошук початкового (базисного) рішення. Він має містити $\boldsymbol{m}$ змінних x_1; x_2; ... x_m. Решта змінних - вільні і мають дорівнювати нулю. Якщо деякі змінні базового рішення $x_j\ (j \in m)$ дорівнюватимуть нулю, йдеться про вироджене базове рішення. Згідно симплекс-методу до вже існуючих $\boldsymbol{n}$ змінних в обмеження додається ще $\boldsymbol{m}$ додаткових змінних з коефіцієнтами, що дорівнюють одиниці, тобто система обмежень приймає вигляд:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_{ij} + x_{n+j} = b_i \quad \left(i = \overline{1,m}\right), \tag{2.11}$$

де $x_{n+i}\ \left(i = \overline{1,m}\right)$ - додаткові змінні. У якості базових на першому етапі беруться саме ці додаткові змінні $(x_{n+1}; x_{n+2}; ...; x_{n+m})$. Тоді основні змінні ($x_1$; x_2; ... x_n) розглядаються на цьому етапі як вільні і прирівнюються нулю. Одночасно в цільову функцію **L** кожної додаткової змінної додається коефіцієнт впливу, набагато значніший (при пошуку мінімуму) порівняно з існуючими коефіцієнтами для основних змінних (x_1; x_2; ... x_n), тобто:

$$L = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{j=n+1}^{n+m} B x_j \ , \tag{2.12}$$

де B - "велике" значення, однакове для всіх додаткових змінних при умові $B >> \max C_j, \left(j \in n\right)$.

Відзначимо, що при пошуку максимуму нова форма залишається у вигляді (2.12), але за умови $B >> \min C_j$ (в практиці розрахунків на ЕОМ при пошуку максимуму приймається вибране при пошуку мінімуму значення B зі знаком «-»). Оскільки x_1; x_2;...x_n приймаються рівними нулю як вільні змінні, то згідно з (2.11) отримаємо базове рішення у вигляді:

$X_Б = \left\{ \underbrace{0;0;...;0}_{n}; \underbrace{b_1;b_2;...;b_m}_{m} \right\}$, що забезпечує згідно з (2.12) $L = \sum_{i=n+1}^{n+m} B \cdot X_j$, яке дає дуже велике значення при пошуку мінімуму та дуже мале значення при пошуку максимуму. Очевидно, що отримане базове рішення не є оптимальним. Для пошуку оптимального рішення складається так звана симплекс - таблиця, що є другим етапом розв'язання задачі ЛП.

1. Симплекс-таблиця складається наступним чином:

Верхній ряд (цільовий ряд) заповнюється коефіцієнтами цільової функції, де $C_j = B$ для $j = \overline{n+1; n+m}$. Другий ряд (під C_j відповідно) застосовується змінними від x_1 до x_{n+m}. Перші три колонки заповнюються даними про базові змінні, тобто $C_{Бi} = C_j = \left(j = \overline{n+1; n+m}\right); X_{Бi} = X_j = \left(j = \overline{n+1; n+m}\right); b_{Бi} = b_j = \left(j = \overline{1; m}\right)$ Решта колонок для $X_j\left(j = \overline{1; n}\right)$ заповнюються коефіцієнтами a_{ij} для додаткових $X_j\left(j = \overline{n+1; n+m}\right)$ відповідні клітинки заповнюються значеннями елементів одиничної діагональної матриці **E**. Останній ряд (індексний ряд) служить для розрахунків індексів Δ_j, що є характеристиками оптимальності отриманого плану. Індекси розраховуються за допомогою наступних формул:

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} C_{Бi} \cdot b_{Бi} \ , \tag{2.13}$$

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} C_{Бi} \cdot a_{Бi} - C_j \ \left(j = \overline{1,n}\right). \tag{2.14}$$

Відзначимо, що для змінних, що входять до базового рішення завжди $\Delta_j = 0$. В даному випадку $\Delta_j = 0 \left(j = \overline{n+1; n+m}\right)$.

2. Наступним етапом симплекс-методу є перевірка отриманого плану на оптимальність. Вважається, що отримане рішення $X_{Бi}\left(j = \overline{1; m}\right)$ є оптимальним, якщо $\Delta_j \le 0 \left(j = \overline{1; n+m}\right)$ при пошуку мінімуму або $\Delta_j \ge 0 \left(j = \overline{1; n+m}\right)$ при пошуку максимуму цільової функції. Якщо вказані умови задовольняються, то отримане оптимальне рішення є $X_{Бi} = b_{Бi} \left(j = \overline{1; m}\right)$, а решта вільних змінних дорівнює нулю. Оптимальне значення цільової функції згідно (2.13), при цьому дорівнює Δ_0. Якщо вказані умови для індексів Δ_j не задовольняються (хоча б для одного стовпчика), то отримане рішення не є оптимальним і підлягає коректуванню з метою поліпшення.

3. Поліпшення отриманого плану представляє собою наступний етап симплекс-методу. Головною задачею цього етапу є, з одного боку, визначення найбільш впливової змінної серед вільних, що має бути введена в число базових, та, з іншого боку, визначення найменш впливової базової змінної, що має бути виведеною з числа базових.

Для визначення вільної змінної X_k, що має бути базовою, визначається ключова колонка (X_k), що відповідає $\Delta_k = \max\{\Delta_j\}\left(j=\overline{1.n}\right)$ - при пошуку мінімуму, або $\Delta_k = \min\{\Delta_j\}\left(j=\overline{1.n}\right)$ - при пошуку максимуму цільової функції.

Для визначення змінної X_L в старому базисі, що має бути переведена в розряд вільних замість X_k, визначається мінімальне відношення:

$$\frac{b_L}{a_{Lk}} = \min\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}\left(j=\overline{1.m}\right) \tag{2.15}$$

при пошуку мінімуму, або

$$\frac{b_L}{a_{Lk}} = \max\left\{\frac{b_i}{a_{ik}}\right\}\left(j=\overline{1.m}\right) \tag{2.16}$$

при пошуку максимуму цільової функції. При цьому ряд називають ключовим рядом, а значення a_{Lk} - ключовим числом. Після цього змінна X_k займе місце X_L в новому базисі, а змінна в другому зверху ряді буде вже вільною. Але при цьому усі коефіцієнти симплекс-таблиці мають бути перераховані.

4. Перетворювання симплекс-таблиці є наступним етапом симплекс-методу. Для цього X_L в старому базисі (колонка $X_{Бi}$) замінюється на X_L, а відповідне значення C_L (колонка $C_{Бi}$) замінюється на C_L. Решта значень симплекс-таблиці перераховується за допомогою формул для ряду ***L***:

$$a'_{Lj} = \frac{a_{Lj}}{a_{Lk}}\left(j=\overline{1.n+m}\right);\quad b'_L = \frac{b_L}{a_{Lk}} \tag{2.17}$$

для решти рядів:

$$\begin{gathered} a'_{Lj} = a_{ij} - \frac{a_{Lj}}{a_{Lk}}\cdot a_{ik}\ (i \neq L);\left(j=\overline{1.n+m}\right); \\ b'_j = b_i - \frac{b_j}{a_{Lk}}\cdot a_{ik}\ (i \neq L), \end{gathered} \tag{2.18}$$

де a' і b' - означають нові значення для модифікованої симплекс-таблиці. Відзначимо також, що на практиці частіше застосовується спрощений запис вказаних формул (2.17) і (2.18) для неключових рядів, що носить назву формул Жордана:

$$HE = CE - \frac{EK_З \cdot EK_{CT}}{K} = \frac{CE\cdot K - EK_P \cdot EK_{CT}}{K}, \tag{2.19}$$

де ***НЕ*** і ***СЕ*** - відповідно будь-який новий елемент (a'_{ij} чи b'_i) з не ключових рядів і той же старий елемент (a'_{ij} чи b'_i) симплекс-таблиці, що перетворюються; ***ЕК$_Р$, ЕК$_{СТ}$*** відповідно елементи ключового ряду і ключового стовпчику таблиці, що перетворюється; ***К*** - ключовий елемент таблиці, що перетворюється (a_{Lk}). Щоб краще запам'ятати цю формулу, є корисним запам'ятати її мнемонічне трактування у вигляді прямокутника (рис. 2.1):

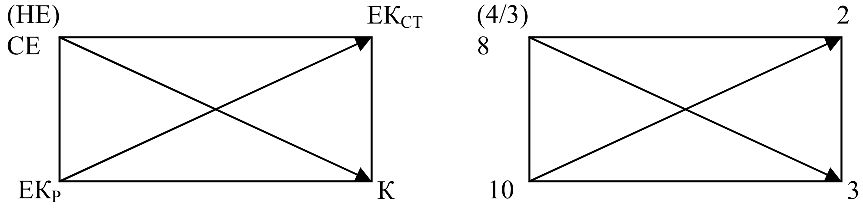


Рис.2.1. Геометричне тлумачення формули Жордана

Далі на конкретному прикладі ми покажемо, як застосувати цю мнемонічну формулу.

5. Після заповнення модифікованої таблиці знову перевіряються умови $\Delta_j \geq 0$ (при пошуку мінімуму) або $\Delta_j \leq 0$ (при пошуку максимуму). Якщо ці умови задовольняються, вважається, що базове рішення оптимальне, а поточне значення індексу Δ_0 буде значенням $\boldsymbol{L_{опт}}$. Якщо зазначені умови ще не задовольняються, то симплекс-таблиця знову модифікується за рахунок переміщення змінних X_L і X_k, доки всі Δ_j не стануть негативними або рівними нулю (при пошуку мінімуму) чи навпаки (при пошуку максимуму).

Відзначимо, що при кожній модифікації симплекс-таблиці (тобто при кожній ітерації базового рішення) значення Δ_0 завжди відображає поточне значення цільової функції. З кожною новою ітерацією значення Δ_0 поступово зменшуватиметься (при пошуку мінімуму) або поступово збільшуватиметься (при пошуку максимуму цільової функції).

Для кращого зрозуміння симплекс-методу розглянемо конкретний приклад. Мінімізувати:

$$L = 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5$$

при обмеженнях: $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_5 = 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \\ -x_1 + x_3 + x_4 = 4 \end{cases}$,

тобто $\boldsymbol{n}$=5; $\boldsymbol{m}$=3. Вводимо до обмежень нові змінні x_6; x_7; x_8. Значення відповідних коефіцієнтів впливу вибираємо набагато більшими за існуючих, тобто $\boldsymbol{B}$=100. Завдяки цьому змінні x_6; x_7; x_8 з базових поступово будуть переведені у вільні, що забезпечує тим самим мінімум цільової функції. Після введення нових змінних маємо:

$$L = 5x_1 + x_2 - x_3 + 4x_4 + 2x_5 + 100x_6 + 100x_7 + 100x_8 \to \min$$

при обмеженнях $\begin{cases} 2x_1 + 3x_3 + x_5 + x_6 = 10 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + x_7 = 8 \\ -x_1 + x_3 + x_4 + x_8 = 4 \end{cases}$

В якості базисних вибираємо;; і отримуємо базисне рішення $X = \{0,0,0,0,0,10,8,4\}$, що забезпечує $L = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 2200$. Складаємо симплекс-таблицю 2.1.

Початкова симплекс-таблиця 2.1

			5	1	-1	4	2	100	100	100
$C_{Бi}$	$X_{Бi}$	$b_{Бi}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
100	x_6	10	2	0	3	0	1	1	0	0
100	x_7	8	1	1	2	0	0	0	1	0
100	x_8	4	-1	0	1	1	0	0	0	1
$\Delta_0 = 100 \cdot 10 + 100 \cdot 8 + 100 \cdot 4 = 2200$			195	99	601	96	98	0	0	0

$$\Delta_1 = 100 \cdot 2 + 100 \cdot (1) + 100 \cdot (-1) - 5 = 195, \quad \Delta_2 = 100 \cdot 0 + 100 \cdot 1 + 100 \cdot 0 - 1 = 99,$$

$$\Delta_3 = 100 \cdot 3 + 100 \cdot 2 + 100 \cdot 1 - (-1) = 601$$

Очевидно, що базові рішення не є оптимальним, тому що усі індекси від Δ_1 до Δ_5 позитивні. В якості ключового ряду вибираємо ряд x_3, що має максимальне позитивне значення $\Delta_3 = 601$. Для визначення ключового ряду рахуємо відповідні відношення згідно (2.16)

$$\frac{b_1}{a_{13}} = \min\left\{\frac{10}{3}; \frac{8}{2}; \frac{4}{1}\right\} = 3\frac{1}{3}.$$

Тобто змінна ключового першого ряду базису (x_6) має бути замінена на вільну змінну ключового ряду (x_3). При цьому ключове число $a_{13} = 3$. Приклад застосування формули для елементу $b_2 = 18$ показано на рис.2.1, ($HE = \frac{8 \cdot 3 - 10 \cdot 2}{3} = \frac{4}{3}$).Складаємо нову симплекс-таблицю.

Поточна симплекс-таблиця 2.2

			5	1	-1	4	2	100	100	100
$C_{Бi}$	$X_{Бi}$	$b_{Бi}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-1	x_3	10/3	2/3	0	1	0	1/3	1/3	0	0
100	x_7	4/3	-1/3	1	0	0	-2/3	-2/3	1	0
100	x_8	2/3	-5/3	0	0	1	-1/3	-1/3	0	1
$\Delta_0 = -1\cdot\frac{10}{3}+100\cdot\frac{4}{3}+100\cdot\frac{2}{3}=196$			-2,78	99	0	96	-102,3	-200,3	0	0

Розраховуємо знову значення індексного ряду. Визначаємо ключову колонку (x_2) і ключовий ряд (x_7). Ключове значення дорівнює 1 .Складаємо нову таблицю.

Поточна симплекс-таблиця 2.3

			5	1	-1	4	2	100	100	100
$C_{Бi}$	$X_{Бi}$	$b_{Бi}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-1	x_3	10/3	2/3	0	1	0	1/3	1/3	0	0
1	x_2	4/3	-1/3	1	0	0	-2/3	-2/3	1	0
100	x_8	2/3	-5/3	0	0	1	-1/3	-1/3	0	1
$\Delta_0 = 64{,}66$			-172,6	0	0	96	-36,33	-134,3	-99	0

По індексному ряду отриманої таблиці визначаємо ключову колонку (x_4) і ключовий ряд (x_8). Ключове число дорівнює 1. Знову складаємо модифіковану симплекс-таблицю.

Остаточна симплекс-таблиця 2.4

			5	1	-1	4	2	100	100	100
$C_{Бi}$	$X_{Бi}$	$b_{Бi}$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8
-1	x_3	10/3	2/3	0	1	0	1/3	1/3	0	0
1	x_2	4/3	-1/3	1	0	0	-2/3	-2/3	1	0
4	x_4	2/3	-5/3	0	0	1	-1/3	-1/3	0	1
$\Delta_0 = 0{,}666$			-12,6	0	0	0	-4,33	-102,33	-99	-96

Отримана симплекс-таблиця містить усі $\Delta_j \leq 0$, завдяки чому можна стверджувати, що отримане рішення є оптимальним, тобто x_1=0; x_2=1,333; x_3=3,333; x_4=1,666; x_5=0; x_6=0; x_7=0; x_8=0, що забезпечує $\boldsymbol{L}_{\mathbf{опт}}$=0,666.

3. Транспортна задача лінійного програмування

Планується будівництво автозаправочної станції автомобілів, що має заправляти автомобілі паливом п'яти видів: А-95; А-93; А-92; А-76; ДП. Припустимо, що вартість купівлі однієї колонки кожного типу відповідно B_1, B_2, B_3, B_4, B_5; вартість монтажу однієї колонки відповідно M_1, M_2, M_3, M_4, M_5. Кожна з колонок для свого монтажу та обслуговування автомобілів потребує відповідно площу S_1, S_2, S_3, S_4, S_5.

До числа обмежень відноситься брак коштів (власник не може витратити на будівництво суму, що не перевищує С умовних одиниць), обмеження загальної площі АЗС (вона повинна розміститись на ділянці, що не перевищує S_0), а також час будівництва (існує відведений термін запланованого будівництва АЗС, який не може перевищувати Т).

Кожна з колонок повинна дати прибуток власникові відповідно у розмірі D_1, D_2, D_3, D_4, D_5. Необхідно визначити оптимальну кількість колонок кожного типу (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), що забезпечать максимальний річний прибуток АЗС з урахуванням коефіцієнта амортизаційних відшкодувань α=0,2 (тобто всі капітальні витрати рівномірно розкладаються на (1/α) років експлуатації АЗС).

Відповідно з останньою умовою формується цільова функція

$$L=\sum_{j=1}^{5}\left[D_j-\alpha\left(B_j+M_j\right)\right]\cdot x_j \to \max,$$

яка відображає річний прибуток від експлуатації всіх встановлених колонок за відрахуванням капітальних витрат (купівля, монтаж), що відносяться до одного року.

Щодо обмежень, то вони мають відображати брак коштів на закупівлю, загальну площу АЗС і обмеження на відведений термін запланованого будівництва АЗС:

$$\begin{cases}(B_1+M_1)x_1+(B_2+M_2)x_2+(B_3+M_3)x_3+(B_4+M_4)x_4+(B_5+M_5)x_5=C\\ S_1x_1+S_2x_2+S_3x_3+S_4x_4+S_5x_5=S_0\\ t_1x_1+t_2x_2+t_3x_3+t_4x_4+t_5x_5=T\end{cases}$$

Зрозуміло, що на кількість встановлених колонок кожного типу поширюється також і додаткова вимога $x_j \geq 0 \quad \left(j=\overline{1,5}\right)$.

Числові дані всіх приведених даних зведені у таблиці 2.5 вихідних даних. Номер варіанта відповідає номеру за алфавітним списком студентів групи.

Таблиця 2.5

Вихідні дані

№	(B_1+M_1)-(B_5+M_5)	C	S_1-S_5	S_0	t_1-t_5	T	D_1-D_5
1	1,1,1,1,1	9	1,0,1,1,0	6	1,1,1,0,0	4	7,8,9,10,11
2	1,1,1,1,2	10	2,1,0,0,2	9	1,1,0,0,1	5	10,8,9,7,11
3	1,1,1,2,2	10	0,2,2,0,1	10	1,1,0,0,1	4	11,8,9,10,7
4	1,2,0,3,0	8	2,0,1,0,2	8	1,0,1,0,1	5	7,8,9,10,11
5	0,1,0,2,3	10	1,1,2,0,0	7	0,0,1,1,1	4	10,8,9,7,11
6	2,0,1,1,0	8	2,1,0,1,0	10	0,1,1,0,1	5	11,8,9,10,7
7	0,2,1,1,0	9	0,2,1,1,0	9	1,0,1,0,1	4	7,8,9,10,11
8	2,3,0,1,0	9	2,0,1,0,1	8	0,1,0,1,1	5	10,8,9,7,11
9	1,1,0,1,0	7	1,0,1,0,1	7	0,1,0,1,1	4	11,8,9,10,7
10	2,4,1,0,0	11	2,0,1,2,0	10	0,1,0,1,1	5	7,8,9,10,11
11	0,3,0,1,3	11	1,0,2,1,0	8	1,0,1,0,1	4	10,8,9,7,11
12	0,1,1,1,0	10	2,1,0,0,2	11	1,1,1,0,0	5	11,8,9,10,7
13	2,3,4,0,1	9	1,0,2,2,0	10	0,1,1,1,0	4	7,8,9,10,11
14	0,1,2,4,3	11	1,0,2,0,2	9	1,0,1,0,1	5	10,8,9,7,11
15	2,0,4,0,1	12	0,1,2,2,0	8	0,1,1,1,0	4	11,8,9,10,7
16	2,1,0,3,0	9	1,0,2,0,1	10	1,0,1,0,1	5	7,8,9,10,11
17	1,2,0,1,3	10	1,2,2,0,0	8	1,1,1,0,0	4	10,8,9,7,11
18	3,2,4,0,2	14	2,2,1,0,0	9	1,0,1,1,0	5	11,8,9,10,7
19	5,2,0,1,4	10	0,1,1,0,2	7	0,1,1,0,1	5	7,8,9,10,11
20	1,0,3,1,1	12	2,2,0,1,0	8	1,1,0,1,0	4	10,8,9,7,11
21	1,3,0,1,5	10	1,1,1,0,0	6	1,1,1,0,0	6	11,8,9,10,7
22	2,1,1,0,5	9	2,0,1,2,0	9	1,0,1,1,0	5	7,8,9,10,11
23	4,3,4,1,0	12	2,0,0,1,1	7	1,0,0,1,1	5	10,8,9,7,11
24	2,1,1,2,1	12	0,2,0,2,2	12	0,1,0,1,1	5	11,8,9,10,7
25	2,1,1,2,1	11	0,2,1,1,0	10	0,1,1,1,0	5	7,8,9,10,11

Контрольні питання:

1. Постановка задачі лінійного програмування.
2. Загальна задача лінійного програмування.
3. Задача лінійного програмування з обмеженням у вигляді нерівностей.
4. Метод послідовного перебору.
5. Принцип симплекс-методу.

Література [4, 5, 12]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 3. Використанням методу місій з метою оптимізації закупівель

Мета: закріплення теоретичного матеріалу і практичне застосування методу місій для формування ефективної закупівельної діяльності підприємства з використанням електронних таблиць Excel.

Завдання :

1. Розрахувати логістичні витрати і фінансовий результат від закупівлі і реалізації товарів.
2. Виконати аналіз структури логістичних витрат, виявити найбільш прибуткові і збиткові види товарів.
3. Обгрунтувати пропозиції, спрямовані на зниження витрат і підвищення ефективності закупівельної діяльності торгового підприємства.
4. Виконати розрахунки з урахуванням пропозицій і зробити висновки.

Методичні вказівки

Метод місій широко використовується в логістиці для аналізу витрат. Він полягає в тому, що увесь досліджуваний процес ділиться на декілька можливих варіантів(місій), і ретельно розраховуються усі витрати і доходи для кожного з них.

Постановка завдання

Вирішено відкрити магазин з торгівлі фруктами або овочами. Під поручительство отримано товарний кредит на умовах з розрахунку 0,2% в добу. Необхідно закупити по 10 тон усіх наявних в продажі товарів(фрукти, овочі, крупи).

Використовуючи знання з дисципліни, необхідно виконати необхідні розрахунки, зрозуміти причини прогнозованих збитків і вжити заходи, що забезпечують отримання максимально можливого прибутку.

У першій частині завдання кожен з видів товарів, що продаються в магазині, розглядається як місія. Усі розрахунки виконати по заданому набору товарів у формі таблиці .

Допущення

Для спрощення розрахунків приймається, що кредит повертається тільки повністю після повного продажу усіх видів фруктів. Неповна доба враховується як повна. Плата за зберігання стягується окремо по кожному виду фруктів, розраховується за первинним обсягом закупівель і не залежить від його зменшення в результаті продажів.
Платаза зберігання припиняється на наступну добу після повного завершення продажу цього виду фруктів. Відсоток відходів умовно приймається постійним на увесь термін фактичного зберігання. Дальність перевезення - 10 км.

Хід виконання завдання

1. Створіть в Excel таблицю і внесіть в неї початкові дані за своїм варіантом.
2. Складіть і введіть в таблицю необхідні формули, строго дотримуючи їх послідовності, розрахуйте результати для усіх видів товарів, використовуючи можливості.
3. Підсумуйте отримані результати по рядках в стовпці "Разом".
4. Розрахуйте сумарний прибуток в абсолютних показниках від продажу кожного виду і усієї партії продуктів, а також показники рентабельності продажів і капіталу.
5. Виконайте аналіз рентабельності по усіх видах продуктів, визначите найбільш вигідні і збиткові види продуктів.
6. Виконайте аналіз структури усіх логістичних витрат, визначите найбільш витратні статті.
7. Обгрунтуйте пропозиції по збільшенню прибутків і скороченню логістичних витрат на закупівлю, транспортування, зберігання, кредит. Внесіть відповідні зміни у розрахунки. Оцініте результати, отримані в результаті оптимізації. Рішення, спрямовані на збільшення прибутку і рентабельності закупівель необхідно приймати з урахуванням результатів маркетингового дослідження ринку.

Можливі управлінські рішення:

1. З метою збільшення прибутків і прибутку можлива зміна об'ємів закупівель. З урахуванням ринкового попиту об'єм найбільш прибуткових товарів може бути збільшений не більше, ніж на 30%, тобто до 13 тонн. Обсяги закупівель низько рентабельних товарів не слід зменшувати більше, ніж на 40%, тобто до 6 тонн для збереження необхідного асортименту. Додатковою умовою є збереження суми витрат на закупівлі, розрахованою в початковому варіанті, оскільки на цю суму отриманий кредит в банку і він повинен бути повністю використаний.

При виконанні розрахунків по цьому варіанту можна використовувати функцію Excel (сервісі) " Пошук рішення". Для цього необхідно як цільовий осередок задати підсумковий прибуток, задати в ній максимальне значення і встановити вищеперелічені обмеження. Методом перебору усіх можливих значень будуть отримані об'єми закупівель, що забезпечують отримання максимального прибутку. Після виконання цих розрахунків необхідно звернути увагу чи залишилися збиткові товари. Якщо такі товари виявлені, необхідно з'ясувати причини збитків. Це можуть бути високі закупівельні ціни в порівнянні з роздрібними, велика величина відходів, або великі терміни продажів. Тому необхідно прийняти рішення, що забезпечують беззбитковість закупівлі цих товарів.

2. Важливим чинником, що впливає на прибуток, є закупівельні гуртові ціни і якість товару. Тому слід розглянути можливість вибору іншихпостачальників. На основі вивчення ринку постачань виявлено, що на ринку діють ще два оптових постачальника товарів, які мають наступні характеристики:

- постачальник А - ціна на 10% нижча, проте якість товару трохи гірше і це може привести до збільшення відходів на 5%. Постачальник знаходиться на відстані 20 км
- постачальник В - ціна на 5 % нижча, якість товару однакова (як в початковому варіанті), знаходиться на відстань 50 км. Необхідно визначити який постачальник є найбільш вигідним.

3. Аналіз результатів розрахунку показує, що при зберіганні відбуваються втрати у виді відходів, які знижують обсяги продажів і суму прибутків. Тому одним з логістичних рішень може бути поліпшення умов зберігання за рахунок оренди іншого складу. Проте, як правило в цьому випадку можуть збільшитися витрати на зберігання. Пропонується оцінити ефективність зміни складу при наступних допущеннях: величина відходів може зменшитися на 15%, але витрати на зберігання при цьому збільшаться на 10%

4. Аналіз причинно-наслідкових зв'язків свідчить, що термін продажу товарів впливає на прибутки і на витрати. Чим довше продається товар, тим більше витрати на зберігання і на кредит. Окрім цього в цьому випадку збільшуються відходи і, отже, зменшуються прибутки. Для скорочення терміну продажів необхідно стимулювати попит, наприклад за допомогою реклами. Пропонується оцінити чи буде вигідним проведення рекламній компанії (витрати на рекламу складають 10000 грн.), якщо в результаті цього середньодобовий обсяг продажів збільшиться на 20%.

5. Можуть бути запропоновані інші рішення, спрямовані на збільшення прибутку.

Для оцінки ефективності рішень необхідно створити в Ecxel таблицю 3.2 "Аналіз результатів розрахунку". У розрахунковому стовпці необхідно ввести формули, що встановлюють зв'язки з розрахунковою таблицею. При зміні даних (за результатами рішень) в розрахунковій таблиці ці дані відбиватимуться в цьому стовпці. Ці дані за допомогою "Спеціальної вставки" необхідно зберегти у відповідному стовпці. Порівняння початкових даних з отримуваними при розрахунках результатами допоможе прийняти правильні ефективні рішення.

Таблиця 3.1

Розрахункова таблиця

Умовні позначення	Формули розрахунку	Значення за видами товарів		Всього
		Картофель	Свекла та ін.	
Ціна оптова, грн. за 1 кг	вихідні дані			
Ціна роздрібна, грн.за 1 кг	вихідні дані			
Середньодобовий обсяг продажів, т	вихідні дані			
Вартість зберігання, грн.за 1 т в сутки	вихідні дані			
Середньодобові відходи, %	вихідні дані			
Вартість замовлення автомашини з бригадою	вихідні дані			
Вартість перевезення, грн.за 1т-км	вихідні дані			
Об'єм закупок первоначальний, т	вихідні дані			
Фактичний час	8/с.3			
Час продажу округлений, діб	округ. с.9 (Мастер функцій. Математичні окрглнагору, розряд 0)			
Витрати на 1т, грн.	с.1·1000			
Витрати на закупівлі, грн.	с.11 с.8/1000			
Витрати на кредит, тис.грн.	0,2/100 с.12· (мах знач. с.10) (Мастер функций Статистические Мах)			
Витрати на перевезення, тис.грн.	(с.6+с.7·с.8·10)/1000			
Витрати на зберігання, тис.грн.	с.4·с.10·с.8/1000			
Витрати на рекламу, тис.грн.				
Витрати сумарні, тис.грн.	с.12+с.13+с14+ с.15+с.16			
Обсяг відходів за весь час зберігання	с.8 с.5 с.10/100			
Обсяг фактично проданих фруктів	с.8-с.18			
Дохід, отриманий від продажу товара, тис.грн.	с.19 с.2			
Прибуток, отриманий від продажу товара, тис.грн.	с.20-с.17			
Рентабельность продажів, %	с.21/с.19			
Рентабельность капіталу, %	с.21/с.17			

Таблиця 3.3

Аналіз результатів розрахунків

Показники	Розрахунко-вий столбець, варіант	Вихідний варіант	Зміна обсягів закупівель	П-к А	П-к Б	Новий склад	Реклама	Оптимальний	Порівняння результатів
Дохід									
Витрати усього, у т.ч.									
закупівлі									
перевезення									
зберігання									
кредит									
прибуток									
Рентабельність продажів									
Рентабельність капіталу									

Таблиця 3.4

Вихідні дані за варіантами

Варіант 1-5 (фрукті)

Параметри	Банани	Яблуки	Груші	Ананаси	Апельсини	Хурма	Сливи
Ціна оптова,	ринкові ціни						
Ціна роздрібна,	ринкові ціни						
Обсяг продажів	1,5	2,0	2,5	0,5	4,0	3,0	6,0
Вартість зберігання,	30	30	30	30	30	30	30
Відсоток відходів	1,0	2,0	4,0	3,0	1,0	0,5	4,0
Вартість замовлення автомашини	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Вартість перевезення	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Обсяг закупівель	10	10	10	10	10	10	10

Таблиця 3.5

Варіант 6-10 (овочі)

Параметри	Картофель	Свекла	Репа	Морковь	Редька	Кабачки	Гарбуз
Ціна оптова,	ринкові ціни						
Ціна роздрібна,	ринкові ціни						
Обсяг продажів	1,5	2,0	2,5	0,5	4,0	3,0	6,0
Вартість зберігання,	20	20	20	20	20	20	20

Відсоток відходів	1,1	2,3	2,0	3,0	1,3	2,5	4,0
Вартість замовлення автомашини	600	600	600	600	600	600	600
Вартість перевезення	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Обсяг закупівель	10	10	10	10	10	10	10

Таблиця 3.6

Варіант 11-15 (крупи)

Параметри	Гречка	Пшено	Ячнева крупа	Манна крупа	Рис	Вівсяна крупа	Перлова крупа
Ціна оптова,	ринкові ціни						
Ціна роздрібна,	ринкові ціни						
Обсяг продажів	1,5	2,0	2,5	0,5	4,0	3,0	6,0
Вартість зберігання,	20	20	20	20	20	20	20
Відсоток відходів	1,2	2,0	2,1	3,0	1,0	0,5	4,0
Вартість замовлення автомашини	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Вартість перевезення	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Обсяг закупівель	10	10	10	10	10	10	10

Таблиця 3.7

Варіант 16-20 (мучні вироби)

Параметри	Вафлі	Пряники	Печиво	Кураб'е	Трубочки	Струдели	Кята
Ціна оптова,	ринкові ціни						
Ціна роздрібна,	ринкові ціни						
Обсяг продажів	2,5	3,0	1,2	1,5	1,0	1,6	1,0
Вартість зберігання,	20	20	20	20	20	20	20
Відсоток відходів	0,8	1,0	1,2	1,1	1,3	1,7	1,3
Вартість замовлення автомашини	1000	1000	1000	1000	1000	1000	1000
Вартість перевезення	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
Обсяг закупівель	10	10	10	10	10	10	10

Контрольні питання:

1. Перерахуйте види матеріальних потоків і одиниці їх виміру.
2. Дайте визначення логістичної операції.
3. Суть методу місій і його практичне використання.
4. Метод компромісів і його практичне використання.
5. Структура логістичних витрат.
6. Метод повної вартості і його застосування для аналізу логістичних витрат.

Література [5, 11, 19]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 4.Управління запасами

Мета: підготовити пропозицій по управлінню запасами товарів на складі (витрати на підтримку запасів) і оптимізації постачань цих товарів (період поповнення, обсяг партії замовлень по кожному найменуванню товарів, вид перевезення і т. д.).

Постановка завдання

Вихідні дані

Характеристика складу

Є складське приміщення для безстелажного зберігання продукції в ящичній тарі. Площа складу S визначається по останній цифрі шифру залікової книжки студента (таблиця. 4.1, гр. 1 і 2).

Орендна плата, грн./м2, в рік визначається по останній цифрі шифру залікової книжки студента і складає C_{ap} (таблиця. 4.1, гр. 1 і 3).

Коефіцієнт використання складських площ приймається k=0,4…0,8. . Цей же коефіцієнт застосовується при визначенні завантаження кузова автомобіля або місткості контейнера (таблиця. 4.1, гр. 1 і 4).

Таблиця 4.1

Характеристика складу

Шифр	Площа складу S, м^2	Орендна плата C_{ap}, грн./м^{2}в рік	Коефіцієнт використання складських площ k	Відсоток зміни значень початкових даних Δ
1	2	3	4	5
0	2000	1000	0,5	+ 10
1	2100	1800	0,6	- 10
2	1900	1100	0,8	0
3	1950	1200	0,7	+ 5
4	2150	900	0,8	- 5
5	1850	1250	0,5	+ 15
6	2050	1050	0,6	- 15
7	2200	950	0,7	0
8	1900	1150	0,4	+ 10
9	1800	850	0,7	- 10

Характеристика товару

Розглядаються чотири види товарів :

-Пиво "Tuborg", перший тип товару, поставляється в ящиках першого типу.

- Вино "Risling", другий тип товару, поставляється в ящиках другого типу.
- "Радянське шампанське" напівсолодке, третій тип товару, поставляється в ящиках третього типу.

- Пиво "Holshten", четвертий тип товару, поставляється у вигляді транспортного пакету на піддоні (паллете).

Товар розміщується на складі штабелями, висота штабелювання - n ярусів. Висота ярусу дорівнює висоті ящика або транспортного пакету. У роботі прийняти, що транспортні пакети штабелюються в 2 яруси, ящики в 4.5 ярусів: якщо остання цифра шифру залікової книжки студента парна (включаючи "0") - те 4, якщо непарна - 5 ярусів.

Габарити товару (а - ширина, b - довжина, з - висота, м) і закупівельна ціна у постачальника товарів приведені в таблицю. 3.2.

Таблиця 4.2

Характеристика товару

Тип товару	Одиниця постачання	Вмести-мость, ед.	Параметри, м			Ціна одиниці товару по закупівлі у постачальника U, грн./ящик; крб./паллету
			a	*b*	*c*	
1	2	3	4	5	6	7
1	Ящик	20	0,50	0,60	0,3	150
2	Ящик	12	0,35	0,45	0,4	540
3	Ящик	8	0,30	0,30	0,3	500
4	Паллета	540	1,20	0,80	1,2	3150

Примітка. Значення Δ визначається з таблиці. 1, гр. 1 і 5, у вигляді процентної зміни значення ціни по закупівлі. Наприклад, якщо в гр. 5 таблиці 4.1 для останньої цифри шифру залікової книжки студента "0" коштує значення "+10", то це означає, що усі значення гр. 7 таблиці. 4.2 необхідно збільшити на 10 %, наприклад, для першого типу товару це складе

$$150 \cdot (1 + 10 / 100) = 150 \cdot (1 + 0{,}1) = 150 \cdot 1{,}1 = 165 \text{ крб./ящик.}$$

Характеристика попиту на товар

Визначається по передостанній цифрі шифру залікової книжки студента. Усі товари укладаються у відповідні ящики або транспортний пакет. Попит по кожному найменуванню - детермінований, інтенсивність λ змінюється в межах 0.50 (таблиця. 4.3, гр. 2, 3, 4 і 5).

Таблиця 4.3

Характеристика попиту на товар

Шифр	Інтенсивність попиту на товар λ, ящиків/сут., палет/добу			
	перший	другий	третій	четвертий
1	2	3	4	5
0	15	20	40	7
1	10	12	18	3
2	35	15	6	5
3	11	8	16	1
4	10	17	11	3
5	21	15	25	3
6	15	26	11	7
7	21	16	3	9
8	7	21	27	5
9	27	13	7	13

Характеристика транспортних засобів приведена в таблиці 4.4.

Таблиця 4.4

Характеристика використовуваних транспортних засобів

Параметри	Автомобілі			Залізничні контейнери	
	"Газель"	ЗИЛ	"Scania"	20-футовий	40-футовий
Довжина А, м	2,5	4	12,0	6,0	12,0
Ширина В, м	2,0	2	2,0	2,4	2,4
Висота Н, м	2,0	2	2,5	2,5	2,5

Для доставки товарів від постачальника усередині міста використовується автомобільний транспорт.

Для міжміських перевезень застосовується як автомобільне, так і контейнерне залізничне перевезення .

При розрахунках вартості доставки вантажів прийняти вартість автомобільного перевезення (таблиця. 3.1, гр. 5) :
для автомобіля "Газель" СГаз = 10·(1 + Δ / 100) грн./км;
для автомобіля ЗИЛ СЗИЛ = 16·(1 + Δ / 100) грн./км;
для автомобіля "Scania" CSc = 22·(1 + Δ / 100) грн./км.
Вартість залізничного контейнерного перевезення дана в таблиці. 4.5.

Таблиця 4.5

Вартість залізничного контейнерного перевезення

Відстань, км	Тарифи на залізничні контейнери, грн.	
	20-футовий	40-футовий
00000000.0050	2800	3750
000051.0220	3125	4250
00221.0390	3375	4750
00391.0570	3625	5000
00571.0760	3875	5250
00761.0920	4125	5500
00921.1100	4375	6000
1101.1300	4625	6500
1301.1450	4875	7000
1451.1600	5125	7500
1601.1800	5375	8125
1801.2000	5625	8750
2001.2200	5875	9375
2201.2400	6125	10000
2401.2700	6375	10750
2701.2900	6625	11625
2901.3100	6875	12250
3101.3300	7125	12750
3301.3500	7375	13250

Вартість доставки контейнерів за допомогою контейнерних шасі:
порожнього - = 16·(1 + Δ / 100) грн./км і = 20·(1 + Δ / 100)) грн./км;
повного - = 20·(1 + Δ / 100) грн./км і = 24·(1 + Δ / 100)) грн./км.
Плата за автомобільний рейс виробляється в двох напрямах, тобто "неодружений рейс" також входить в ціну доставки.

Відстань доставки

Склад компанії знаходиться в м. Дніпропетровську. Постачальник товару для кожного студента визначається по останній цифрі суми передостанньою і останньою цифр шифру залікової книжки студента (таблиця. 3.6). Наприклад, якщо дві останні цифри шифру залікової книжки студента 23, то розташування постачальника визначається як 2 + 3 = 5 і відповідає місту Харків. Відстань від складу в Дніпропетровську до складу постачальника визначається студентом самостійно, з точністю до десятків кілометрів.

Таблиця 4.6

Пункт розміщення складу постачальника

Шифр	Пункт розміщення складу постачальника
0	20 км від залізничного терміналу м. Донецьк
1	40 км від залізничного терміналу м. Київ
2	25 км від залізничного терміналу м. Рівне
3	50 км від залізничного терміналу м. Одеса
4	30 км від залізничного терміналу р. Суми
5	35 км від залізничного терміналу м. Севастополь
6	40 км від залізничного терміналу м. Луцьк
7	20 км від залізничного терміналу м. Луганськ
8	25 км від залізничного терміналу м. Львів
9	50 км від залізничного терміналу м. Черкаси

Хід виконання завдання

1. Виходячи з останньої і передостанньої цифр шифру залікової книжки студента вибрати:
- площу складського приміщення S (таблиця 4.1, гр. 2);
- орендну плату Сар (таблиця 4.1, гр. 3);
- коефіцієнт використання складських приміщень або завантаження кузова, контейнера k (таблиця 4.1, гр. 4);
- висоту штабелювання ящиків в яруси п з характеристик товару;
- габарити тари (a, b, c) і місткість для кожного типу товару (таблиця 43.2, гр. 2-6);
- закупівельну ціну товару у постачальників U (таблиця 4.2, гр. 7);
- відсоток зміни закупівельної ціни товару у постачальників і вартості доставки автомобільним транспортом Δ (таблиця 4.1, гр. 5);
- інтенсивність попиту на товар λ (таблиця 4.3, гр. 2-5);
- місце розташування постачальника товару (таблиця 4.6);
- вартість доставки вантажів на кілометр шляху для автомобілів "Газель", ЗИЛ і "Scania";
- типи використовуваних транспортних засобів і тарифи на перевезення (таблиця 4.4 і 4.5).

2. Визначити місткість складу Gскл по тарі і -го типу (ящики, палети) по формулі:

$$G_{скл\,i} = \frac{S\,n\,k}{a_i\,b_i}, \qquad i = 1, 2, 3, 4.$$

3. Визначити вартість зберігання h одиниці товару і -го типу (ящика, палети) в залежності:

$$h_i = \frac{S\,C_{ар}}{T_{раб}\,G_{скл\,i}}, \qquad i = 1, 2, 3, 4,$$

де Траб - число робочих днів в році, Траб = 365 днів.

4. Визначити відстань l від складу в Дніпропетровську до складу постачальника. Джерела - таблиці відстаней, карти (схеми) маршрутів і т. д. Точність - до десятків кілометрів.

5. Визначити вартості доставки з використанням різних транспортних засобів.

Вартість доставки вантажів (КГаз, КЗИЛ, KSc) автомобілями "Газель", ЗИЛ і "Scania" визначається по залежностях

$$K_{Газ} = 2\,l\,C_{Газ},$$
$$K_{ЗИЛ} = 2\,l\,C_{ЗИЛ},$$
$$K_{Sc} = 2\,l\,C_{Sc}.$$

Вартість доставки вантажів комбінованим способом (К20ф, К40ф) з використанням 20 - або 40-футових контейнерів виробляється по залежностях

$$K_{20\phi} = \left(l_Д + l_м\right) \cdot \left(C_{20\phi}^{порож} + C_{20\phi}^{повн}\right) + C_{20\phi}^{з/д},$$

$$K_{40\phi} = \left(l_Д + l_м\right) \cdot \left(C_{40\phi}^{порож} + C_{40\phi}^{повн}\right) + C_{40\phi}^{з/д},$$

де *lД* - відстань від складу до залізничного терміналу в Дніпропетровську, км;

lм - відстань від складу постачальника до залізничного терміналу в місті(таблиця. 3.6);

$C_{20\phi}^{порож}$, $C_{20\phi}^{повн}$, $C_{40\phi}^{порож}$, $C_{40\phi}^{повн}$ - вартість доставки контейнерів (20 - або 40-футового) за допомогою контейнерних шасі відповідно порожнього і повного;

$C_{20\phi}^{з/д}$, $C_{40\phi}^{з/д}$- вартість доставки 20 - або 40-футового контейнерів на ділянці Дніпропетровськ - місто (таблиця. 4.5).

6. Визначити оптимальне значення періоду поповнення запасів при доставці j -м видом транспортного засобу Топт по залежності

$$T_{опт\,j} = \sqrt{\frac{2K_j}{\sum_{i=1}^{4} h_i \lambda_i}}, \qquad j = 1,2,3,4,5,$$

де індекс j відповідає:

- j = 1 - відповідає автомобілю "Газель",

- j = 2 - автомобілю ЗИЛ,

- j = 3 - автомобілю "Scania"

- j = 4 - 20-футовому контейнеру

- j = 5 - 40-футовому контейнеру.

Отримані значення періоду поповнення запасів справедливі при необмеженій вантажомісткості транспортного засобу.

7. Визначити період поповнення запасів TG виходячи з реальної вантажомісткості кожного транспортного засобу доставки по залежності

$$T_{G\,j} = \frac{A_j B_j H_j\, k}{\sum_{i=1}^{4} a_i b_i c_i\, \lambda_i}, \qquad j = 1,2,3,4,5.$$

Індекс j набуває значень, аналогічних приведеним в п. 6.

Проте такий підхід не зовсім відповідає істині, тому цей розрахунок доцільніше виробляти з урахуванням реальної вантажомісткості кожного транспортного засобу.

8. Вибрати оптимальний період доставки за принципом: якщо для j -го виду транспортного засобу доставки Топт j ≤ TG j, то як оптимальне вибирається значення Топт j. Інакше - оптимальне значення TG j.

Позначимо:

$$T_j = \begin{cases} T_{опт\,j}, & если \quad T_{опт\,j} \le T_{G\,j}, \\ T_{G\,j}, & если \quad T_{опт\,j} > T_{G\,j}, \end{cases} \qquad j = 1,2,3,4,5.$$

9. Визначити значення витрат Кзат на підтримку запасів, віднесених до однієї доби роботи складу, за умови вибору j -го транспортного засобу по залежності

$$K_j^{вит} = K^{зак} + K_j^{дост} + K_j^{зб}, \qquad j = 1,2,3,4,5,$$

де - витрати по закупівлі товарів у постачальника

$$K^{зак} = \sum_{i=1}^{4} U_i \lambda_i;$$

$K_j^{дост}$ - витрати по доставці товарів на склад (транспортні витрати) при використанні j -го транспортного засобу

$$K_j^{дост} = \frac{K_j}{T_j}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5;$$

$K_j^{зб}$ - - витрати по зберіганню товарів при його доставці j -м транспортним засобом

$$K_j^{зб} = T_j \sum_{i=1}^{4} \frac{\lambda_i h_i}{2}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

10. Ці дослідження провести по усіх транспортних засобах підвезення, результати занести у форму 1 (таблиця. 3.7).

Аналізуючи результати розрахунків, зведених в таблиці. 4.7, робимо обгрунтований висновок про організацію доставки товарів із складу постачальника: період поповнення, обсяг партії постачань по кожному найменуванню товарів, вид перевезення і т. д.

Таблиця 4.7

Аналіз результатів розрахунків

Тип транспортного засобу	Термін постачання, доба			Складові витрати, грн.			Сумарні витрати, грн.
				витрати на закупівлю	логістичні витрати		
	$T_{опт}$	T_G	T		доставка	зберігання	
«Газель»							
ЗИЛ							
«Scania»							
20-футовый							
40-футовый							

Висновок. При заданих розташуванні постачальника і споживача, параметрах складу і конкретного попиту на товар найбільш вигідним є варіант доставки товару *(вказати спосіб доставки*).

Досить близьким до нього є варіант доставки товарів (*вказати спосіб доставки*).

Оптимальне постачання має параметри (таблиця. 4.8).

Таблиця 4.8

Параметри постачання

Доба	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Запаси, добова видача										
Вартість, грн.: постачання зберігання Разом										

- період поповнення - (*вказати період*) доби;
- кількість постачань в рік (*з округленням кількості постачань в рік*);
- об'єми постачання: (*кількість*) ящиків першого типу - пиво "Tuborg", (*кількість*) ящиків другого типу - вино "Risling", (*кількість*) ящиків третього типу - "Радянське шампанське" напівсолодке і (*кількість*) піддонів (палет) - пиво "Holshten";
- логістичні витрати за перші 10 діб складають (*сума*) грн., тобто (*сума*) грн./сут.;
- виходячи з вибраного варіанту доставки вантажу (*тип транспортного засобу*) потреба в складських площах складе (*кількість*), м2;
- доля витрат на підтримку запасів (відношення логістичних витрат до витрат по закупівлі, віднесених до доби) складає (*кількість*).

Примітка. У дужках курсивом вказані найменування параметрів, які вимагається замінити розрахованими значеннями.

Контрольні питання:

1. Складові витрат на зберігання товару.
2. Характеристика попиту на товар
3. Способи доставки

Література [3, 14, 21]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 5. Транспортна задача. Складання опорного плану перевезень

Мета: опанування методами складання опорного плану перевезень.

Завдання:

1. Ознайомитись з постановкою транспортної задачі лінійного програмування та складанням транспортної таблиці.
2. Ознайомитись з методами складання опорного плану перевезень (метод північно-західного кута, метод мінімальних елементів транспортної таблиці).
3. Вирішити поставлену транспортну задачу лінійного програмування використовуючи представлені методики та оптимізувати отриманий план перевезень.

1. Постановка транспортної задачі. Складання транспортної таблиці.

Прикладом задачі ЛП може бути класична задача складання оптимального плану перевезень вантажів від постачальників вантажів (наприклад, складів) до ***n*** замовників цих вантажів. Припустимо, що постачальники $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ мають у наявності відповідні обсяги вантажів $a_i \left(i = \overline{1; m}\right)$. За рахунок цих вантажів необхідно задовольнити замовлення клієнтів $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ в обсягах відповідно $b_j \left(j = \overline{1; n}\right)$.

Відомими є відстані від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$, тобто $\left\| l_{ij} \right\|_n^m$. Відома також вартість тонно-кілометра транспортної роботи ($С_{ткм}$). Для спрощення будемо вважати, що вантаж однотипний, тобто $С_{ткм}$ однакова для будь-якого постачальника і клієнта. Необхідно визначити обсяги перевезень від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ тобто елементи матриці $\left\| x_{ij} \right\|$, що забезпечують мінімізацію загальних витрат на здійснення всіх перевезень. Формалізуємо вказану задачу.

1) Цільова функція (загальна вартість перевезень) матиме вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ткм} \cdot l_{ij} \cdot x_{ij} = C_{ткм} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \tag{5.1}$$

2) Загальний обсяг вантажів, що вивозиться, не повинен перевищувати наявність обсягів вантажів у постачальників, тобто:

$$\begin{cases} \sum x_{1j} \le a_1 \\ \sum x_{2j} \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum x_{mj} \le a_m \end{cases} \quad \textit{або} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ \ (\text{при } i=1,2,\ldots,\boldsymbol{m}) \tag{5.2}$$

3) Усі заявки клієнтів мають бути задоволеними, тобто:

$$\begin{cases} \sum x_{i1} = b_1 \\ \sum x_{i2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum x_{in} = b_n \end{cases} \quad \textit{або} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (\text{при } j=1,2,\ldots,\boldsymbol{n}) \tag{5.3}$$

Ця задача має назву транспортної задачі (Т-задачі). Як і для попередньої, для цієї задачі залишається у силі вимога $x_j \geq 0 \left(j = \overline{1; n}\right)$. Відмітимо, що Т-задача відноситься до ЗЗЛП (оскільки (3.3) є рівностями), загальна кількість рівнянь-обмежень становить (***m***+***n***). Враховуючи, що $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, одне з обмежень (будь-яке) буде зайвим, тобто загальна кількість необхідних обмежень становитиме (***m***+***n***-1).

Якщо вимога балансу "попиту" і "пропозиції" не має місця, наприклад $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$,то обмеження (3.3) залишаються у вигляді рівнянь, а обмеження (3.2) - у вигляді нерівностей, тоді така транспортна задача відноситься до ЗЛПН. Аналогічно для випадку $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ ("попит" перевищує "пропозицію") маємо (3.2) у вигляді обмежень-рівнянь, а (3.3) - в вигляді обмежень-нерівностей.

Задача полягає в визначенні такого плану перевезень $X = \left\| x_{ij} \right\|_n^m$, де x_{ij} - обсяги перевезень від A_i до B_j, що забезпечує мінімальні загальні витрати на здійснення усіх перевезень. При цьому необхідно задовольнити потреби клієнтів $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ і повністю вивести усю наявність вантажів, що накопичена у складських пунктах $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$. Очевидно, що ця остання вимога обумовила існування балансу попиту і пропозиції, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$, тому транспортна задача (ТЗ) у такій постановці носить назву закритої (збалансованої) ТЗ, на відміну від відкритої (незбалансованої) ТЗ, де $\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j$. Формалізуємо збалансовану Т-задачу.

Визначити оптимальні значення елементів матриці змінних $X = \left\| x_{ij} \right\|_n^m$ (обсяги перевезень) від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$, що забезпечують мінімум цільової функції (загального обсягу перевезень) у вигляді:

$$L = c \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \tag{5.4}$$

при обмеженнях:
$$\begin{aligned} &\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = a_i \quad \left(i = \overline{1, m}\right) \\ &\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = b_j \quad \left(j = \overline{1, n}\right) \end{aligned} \qquad (5.5,\ 5.6)$$

за умови невід'ємності змінних, тобто $\sum_{i=1}^{m} x_{ij} \geq 0 \quad \left(i = \overline{1, m}\right), \left(j = \overline{1, n}\right)$. Зауважимо, що обмеження (5.5) відображають вимогу повного вивезення накопичених вантажів; обмеження (5.6) — вимогу повного забезпечення замовлень клієнтів цих вантажів. Це типова загальна задача ЛП (тобто ЗЗЛП), що може бути вирішена за допомогою симплекс-методу. При цьому обмеження мають бути представлені у матричній формі: АХ = В, де

$$X=\left\|x_{ij}\right\|_n^m \quad B=\{a_1;a_2;\ldots;a_m;b_1;b_2;\ldots;b_n\}^T \quad A=\left.\underbrace{\left\|\begin{matrix}\left.\begin{matrix}11\ldots100\ldots0\ldots00\ldots0\\00\ldots011\ldots1\ldots00\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\00\ldots000\ldots0\ldots11\ldots1\end{matrix}\right\}m\\\left.\begin{matrix}10\ldots010\ldots0\ldots10\ldots0\\01\ldots001\ldots0\ldots10\ldots0\\\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\\underbrace{00\ldots1}_{n}\underbrace{00\ldots1}_{n}\ldots\underbrace{00\ldots1}_{n}\end{matrix}\right\}n\end{matrix}\right\|}_{m\cdot n}\right\}m+n.$$

Розглянемо найбільш поширені спрощені методи розв'язання збалансованих Т-задач (складання опорного плану перевезень). Всі без винятку спрощені методи розв'язання Т-задачі базуються на транспортній таблиці 5.1:

Таблиця 5.1

j / i	B_1	B_2	…	B_j	…	B_n	Запаси $\mathbf{a_i}$
A_1	$x_{11}^{l_{11}}$	$x_{12}^{l_{12}}$	…	$x_{1j}^{l_{1j}}$	…	$x_{1n}^{l_{1n}}$	$\boldsymbol{a_1}$
…	…	…	…	…	…	…	…
A_i	$x_{i1}^{l_{i1}}$	$x_{i2}^{l_{i2}}$	…	$x_{ij}^{l_{ij}}$	…	$x_{in}^{l_{in}}$	$\boldsymbol{a_i}$
…	…	…	…	…	…	…	…
A_m	$x_{m1}^{l_{m1}}$	$x_{m2}^{l_{m2}}$	…	$x_{mj}^{l_{mj}}$	…	$x_{mn}^{l_{mn}}$	$\boldsymbol{a_m}$
Замовлення $\boldsymbol{b_j}$	$\boldsymbol{b_1}$	$\boldsymbol{b_2}$	**…**	$\boldsymbol{b_j}$	**…**	$\boldsymbol{b_n}$	$\sum_{i=1}^{m} a_i=\sum_{j=1}^{n} b_j$

В центрі кожної клітинки перехрестя A_i і B_j проставляються обсяги відповідних перевезень (x_{ij}), у її верхньому правому куті - відповідні відстані від A_i до B_j, тобто l_{ij}. Зауважимо, що згідно з рангом системи обмежень кількість "зайнятих" клітинок (для яких x_{ij}>0) має дорівнювати ($\boldsymbol{m}$+$\boldsymbol{n}$-1). Решта клітинок ($\boldsymbol{m}$-1)($\boldsymbol{n}$-1) залишається вільними (для яких x_{ij}=0). З застосуванням транспортних таблиць Т-задача формулюється наступним чином: визначити такі позитивні значення обсягів перевезень x_{ij}>0, сума яких по кожному $\boldsymbol{i}$-му ряду $\left(i=\overline{1;m}\right)$ дорівнює $\boldsymbol{a_i}$, і сума яких по кожній $\boldsymbol{j}$-й колонці $\left(j=\overline{1,n}\right)$ дорівнює $\boldsymbol{b_j}$, при цьому сума добутків ($l_{ij}\cdot x_{ij}$) по всіх клітинках буде мінімальною.

Як вже визначалось, починаємо завжди зі складання опорного плану перевезень. Розглянемо деякі методи складання опорного плану.

2. Методами розв'язання транспортної задачі

2.1. Метод північно-західного кута

Як приклад заповнимо транспортну таблицю для конкретних значень: n=4; m=3; A_1=100т; A_2=120т; A_3=140т; B_1=80т; B_2=100т; B_3=110т; B_4=70т. Матриця відстаней має вигляд (в км):

$$\begin{Vmatrix} 4 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 6 & 1 & 8 \\ 9 & 3 & 6 & 2 \end{Vmatrix}_4^3 .$$

Складання опорного плану перевезень методом північно-західного кута:

Таблиця 5.2

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	$\boldsymbol{a_i}$
A_1	80^4	20^7	^{2}	^{5}	100
A_2	^{3}	80^6	40^1	^{8}	120
A_3	^{9}	^{3}	70^6	70^2	140
$\boldsymbol{b_j}$	80	100	110	70	360

Заповнення обсягів перевезень починаємо з клітинки A_1B_1 (звідси назва методу). Принцип заповнення: задовольнити максимально можливий обсяг замовлення $\boldsymbol{b_1}$; якщо обсягу $\boldsymbol{a_1}$ не вистачає, беремо частину від $\boldsymbol{a_2}$, якщо в $\boldsymbol{a_1}$ щось залишається, віддаємо решту $\boldsymbol{a_1}$ до $\boldsymbol{b_2}$ і т.д. Для розглянутого випадку робимо наступне:

1. Задовольнимо $\boldsymbol{b_1}$=80, решту $\boldsymbol{a_1}$=(100-80) = 20 відправимо до B_2;

2. Оскільки $\boldsymbol{b_2}$ ще не задовільнена, додамо необхідний обсяг за рахунок A_2 (ще 80); решту $\boldsymbol{a_2}$=(120-80)=40 відправимо до B_3;

3. Щоб повністю задовольнити B_3, додамо необхідний обсяг за рахунок A_3 (ще 70). Решту $\boldsymbol{a_3}$= (140-70)=70 відправимо до B_4, задовольнив таким чином його повністю.

Підрахуємо кількість ненульових перевезень (зайнятих клітинок). Таких є 6, що відповідає умові ($\boldsymbol{m}$+$\boldsymbol{n}$-1)=(4+3-1)=6. Оскільки суми перевезень по рядах і колонках відповідають $a_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ i $b_j\left(j=\overline{1,n}\right)$, отриманий план перевезень є можливим і опорним, тому що цей план є початковим. Для отриманого плану можливо підрахувати загальні витрати на здійснення всіх перевезень. Якщо приймемо для спрощення С=1грн (вартість 1 ткм), то L=1•(80•4+20•7+80•6+40•1+70•6+70•2)=1540 грн.

Стає питання, чи є цей план перевезень оптимальним? Скоріше за все ні, тому що ми не звертали уваги на існуючі відстані від A_i до B_j , що значно відрізняються одна від одної. Наприклад, отриманий план містить перевозку x_{12}=20т на відстань 7 км, коли здається доцільнішим здійснити перевозку x_{32}=20т на відстань лише 3 км, щоб повністю задовольнити B_2 та інші. Тому, незважаючи на простоту отримання опорного плану перевезень, майже завжди отриманий опорний план не буде оптимальним.

2.2. Метод мінімальних елементів транспортної таблиці

Щоб не повторювати помилок методу північно-західного кута, звернемо увагу на існуючі відстані між A_i і B_j з метою можливого усунення занадто "довгих" перевезень. Для цього є два шляхи:

- брати до уваги відстані від кожного окремого A_i і до всіх B_j (цей метод має назву "метод мінімального елемента в ряду");

- брати до уваги усі існуючи відстані і задовольняти потреби B_j $\left(j=\overline{1;n}\right)$ поступово за рахунок найближчого складу, починаючи з мінімальної відстані l_{ij} (цей метод має назву "метод мінімального елементу в матриці").

Згідно з першим методом спочатку заповнюємо клітинку першого ряду, що має мінімальне значення l_{ij}, решту обсягів $\boldsymbol{a_i}$ заносимо в наступну за значенням l_{ij} цього ж першого ряду. Потім "завантажуються" тим самим чином другий ряд і т.д. Для розглянутого прикладу будемо мати наступний опорний план перевезень:

Спочатку заповнюється A_1B_3 обсягом x_{13}=$\boldsymbol{a_1}$= 100, потім A_2B_3 обсягом x_{23}=10 за рахунок $\boldsymbol{a_2}$, що складає недостачу B_2; потім A_2B_1 обсягом x_{21}=$\boldsymbol{b_1}$=80. Решта $\boldsymbol{b_2}$= (120-10-80)=30 відправляємо в A_2B_2 і т.д.

Отриманий план є можливим, тому що суми обсягів перевезень по рядах і колонках є рівними відповідним $a_i\left(i=\overline{1,m}\right)$ і $b_j\left(j=\overline{1,n}\right)$. Кількість зайнятих клітинок дорівнює 6. Підрахуємо загальні витрати на здійснення цього плану перевезень (при С=1грн).

L_1=1•(100•2+80•3+30•6+10•1+70•3+70•2)=980 грн.

Складання опорного плану методом мінімального елемента в ряду:

Таблиця 5.3

j \ *i*	B_1	B_2	B_3	B_4	$\boldsymbol{a_i}$
A_1	^{4}	^{7}	100^{2}	^{5}	100
A_2	80^{3}	30^{6}	10^{1}	^{8}	120
A_3	^{9}	70^{3}	^{6}	70^{2}	140
$\boldsymbol{b_j}$	80	100	110	70	360

Порівняння цієї суми з попереднім опорним планом свідчить, що він є більш привабливим і дешевим, ніж отриманий за допомогою методу північно-західного кута. Згідно з методом мінімального елементу в матриці, будемо мати наступний опорний план перевезень. Складання опорного плану перевезень методом мінімального елементу в матриці:

Таблиця 5.4

j \ i	B_1	B_2	B_3	B_4	$\boldsymbol{a_i}$
A_1	70^{4}	30^{7}	^{2}	^{5}	100
A_2	10^{3}	^{6}	110^{1}	^{8}	120
A_3	^{9}	70^{3}	^{6}	70^{2}	140
$\boldsymbol{b_j}$	80	100	110	70	360

Спочатку завантажуємо клітинку A_2B_3, що має мінімальну відстань l_{23}=1, тобто $x_{23}=\boldsymbol{b_3}$=110т. Наступна клітинка A_3B_4, що має l_{34}=2, завантажується обсягом $x_{34}=\boldsymbol{b_4}$=70т. Наступною клітинкою має бути A_1B_3, що має l_{13}= 2, але ми вже задовольнили повністю $\boldsymbol{b_3}$. Тому переходимо до клітинки A_2B_1, що має l_{21}=3. Але ми не можемо повністю задовольнити $\boldsymbol{b_1}$=80т, тому що в A_2 залишилось тільки (120-110)=10т. Завантажуємо x_{21} =10т.

Слідкуючи за правилом заповнення, завантажуємо A_3B_2 обсягом x_{32}=70т, потім A_1B_2 обсягом x_{12}=30т, тому що решта замовлення вже задовільнена, і нарешті x_{11}=70т. Зазначимо, що отриманий план є можливим (відповідні суми по рядах і колонках дорівнюють відповідним $\boldsymbol{a_i}$ і $\boldsymbol{b_j}$). Підрахуємо загальні витрати на здійснення цього опорного плану перевезень (при С = 1 грн/ткм).

L_2=1•(70•4+30•7+10•3+110•1+70•3+70•2)= 980 грн.

Близьким до зазначеного вище методу є метод Лебедєва - Тихомирова, що шукає черговість заповнення клітинок транспортної таблиці за спеціально розрахованими коефіцієнтами черговості. Суттєвість методу полягає у наступному:

1. По всіх рядах і колонках розраховують середні арифметичні відстані

$$\bar{l}_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}l_{ij};\quad \left(i=\overline{1,m}\right)$$
$$\bar{l}_j=\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}l_{ij};\quad \left(j=\overline{1,n}\right) \tag{5.7}$$

2. Отримані значення середніх арифметичних відстаней заносять в додаткові ряд і колонку таблиці.

Заповнення транспортної таблиці за методом Лебедєва – Тихомирова

Таблиця 5.5

j \ i		B_1	B_2	B_3	B_4	a_i
	$\bar{l}j$ \ $\bar{l}i$	5,33	5,33	3	5	
A_1	4,5	$_{5,8}\ ^{4}$	$_{2,8}\ 30^{7}$	$_{5,5}\ 70^{2}$	$_{4,5}\ ^{5}$	100
A_2	4,5	$_{6,8}\ 80^{3}$	$_{3,8}\ ^{6}$	$_{6,5}\ 40^{1}$	$_{1,5}\ ^{8}$	120
A_3	5	$_{1,3}\ ^{9}$	$_{7,3}\ 70^{3}$	$_{2}\ ^{6}$	$_{8}\ 70^{2}$	140
b_j		80	100	110	70	360

3. Визначають так звані коефіцієнти черговості $K_{ij} = (\overline{l_i} + \overline{l_j}) - l_{ij}$ і заносять їх в нижній лівий кут кожної клітинки.

4. Знаходять $(K_{ij})_{\max}$ і заносять в цю клітинку максимальне можливе значення обсягу перевезень.

5. Заносять у відповідні клітинки максимально можливі обсяги перевезень згідно поступово зменшуючи значення K_{ij}.

Отримано опорний план, що відповідає загальній вартості перевезень (при С = 1 грн/ткм).

L_3=1•(30•7+70•2+80•3+40•1+70•3+70•2)=980 грн.

За умови ручних розрахунків Т-задач і при великих значеннях ***n*** і ***m*** процедура отримання опорного плану за цим методом є більш складною, ніж, наприклад, метод північне-західного кута чи метод мінімальних елементів, тому вибір методу складання опорного плану перевезень залежить від розміру Т-задачі, що розв'язується.

3. Транспортна задача

Скласти оптимальний план перевезень вантажів від постачальників вантажів (використовуючи всі вище зазначені методи) до ***n*** замовників цих вантажів. Постачальники $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ мають у наявності відповідні обсяги вантажів $a_i \left(i = \overline{1; m}\right)$. За рахунок цих вантажів необхідно задовольнити замовлення клієнтів $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ в обсягах відповідно $b_j \left(j = \overline{1; n}\right)$.

Відомими є відстані від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$, тобто $\left\| l_{ij} \right\|_n^m$. Відома також вартість тонно-кілометра транспортної роботи ($С_{ткм}$). Для спрощення будемо вважати, що вантаж однотипний, тобто $С_{ткм}$ однакова для будь-якого постачальника і клієнта. Необхідно визначити обсяги перевезень від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ тобто елементи матриці $\left\| x_{ij} \right\|$, що забезпечують мінімізацію загальних витрат на здійснення всіх перевезень. Формалізуємо вказану задачу.

Цільова функція (загальна вартість перевезень) матиме вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ткм} \cdot l_{ij} \cdot x_{ij} = C_{ткм} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

Загальний обсяг вантажів, що вивозиться, не повинен перевищувати наявність обсягів вантажів у постачальників, тобто:

$$\begin{cases} \sum x_{1j} \le a_1 \\ \sum x_{2j} \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum x_{mj} \le a_m \end{cases} \quad \textit{або} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ \ (\text{при } i=1,2,...,\boldsymbol{m})$$

Усі заявки клієнтів мають бути задоволеними, тобто:

$$\begin{cases} \sum x_{i1} = b_1 \\ \sum x_{i2} = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \sum x_{in} = b_n \end{cases} \quad або \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \text{(при } j\text{=1,2,...,}\boldsymbol{n}\text{)}$$

Числові дані всіх приведених даних зведені у таблиці 3.6 вихідних даних. Номер варіанта відповідає номеру за алфавітним списком студентів групи.

* Для всіх варіантів ***n=4***, ***m=3***.

Таблиця 5.6

Вихідні дані

Постачальник	Споживач				Наявність вантажу, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	
A_1	7+i	2+j	4+i	6+j	80+15j
A_2	2+j	6+i	3+j	7+i	220-5j
A_3	8+j	12-i	9+j	13-j	150-10j
Потреба вантажу, b_j	110+5i	80-5i	120-5j	140+5j	450

Примітка – *i* = *j* відповідають номеру за алфавітним списком студентів групи (від 1 до 9), усі інші починаючи з 10 – *i* = першій цифрі, а *j* = другій цифрі номеру.

Контрольні питання:

1. Постановка транспортної задачі.
2. Збалансована транспортна задача.
3. Складання транспортної таблиці.
4. Складання опорного плану перевезень методом північно-західного кута.
5. Складання опорного плану перевезень методом мінімальних елементів.

Література [1, 4, 5, 7, 8]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 6. Оптимізація опорного плану перевезень транспортної задачі. Розподільчий метод оптимізації транспортної задачі лінійного програмування

Мета заняття: закріплення практичних навиків з оптимізації складеного опорного плану перевезень транспортної задачі розподільчим методом.

Завдання:

1. Ознайомитись з розподільчий метод оптимізації плану перевезень.
2. Скласти оптимальний план перевезень вантажів від постачальників вантажів до замовників методом Фогеля або Угорським методом.
3. Вирішити складену транспортну задачу лінійного програмування використовуючи представлену методику та оптимізувати отриманий план перевезень.

1. Методи оптимізації планів перевезень

Попередня робота вказує, що загальна вартість перевезень по тому чи іншому опорному плану змінюється залежно від методу складання опорного плану. Але завжди стає питання отримання оптимального плану, що забезпечує мінімум L. Серед багаточисельних методів перевірки оптимальності отриманого плану та його поліпшення до оптимального, варто визначити саме два методи, що є найбільш придатними для оптимального розв'язання Т-задач: розподільчий метод оптимізації та метод потенціалів. Розглянемо розподільчий метод оптимізації.

Розподільчий метод оптимізації

Першим кроком з перевірки отриманого плану перевезень на оптимальність є перевірка кількості ненульових перевезень (тобто кількості зайнятих клітинок), що має бути обов'язково рівній (*m*+*n*-1), тому що всі методи оптимізації транспортних таблиць вимагають саме цієї кількості зайнятих клітин.

На випадок, коли опорний план має понад (*m*+*n*-1) зайнятих клітинок, необхідно ліквідувати зайві перевезення. Для ліквідації одного зайвого перевезення знаходиться замкнутий контур, який має в вершинах тільки зайняті клітинки. Потім визначається найменше перевезення у вершинах цього контуру (x_{min}). Цій клітинці привласнюють знак "-", потім кожній наступній вершині почергово привласнюються знаки "+", за ним "-" і так далі. Потім до перевезень в клітинках із знаком "+" додаємо x_{min}, а від перевезень в клітинках із знаком "-" віднімаємо x_{min}. Таким чином, клітинка, що має "x_{min}", стає нульовою, тобто незавантаженою.

На випадок, коли кількість зайнятих клітинок менша (*m*+*n*-1), їх кількість збільшується до (*m*+*n*-1) шляхом додавання $x_{min}=0$ у вільні клітинки, що мають менше значення l_{ij}. Надалі ці клітинки будемо вважати також зайнятими, а кількість перевезень рівними (*m*+*n*-1).

Розглянемо опорний план, отриманий за допомогою методу північно-західного кута, що наведений в таблиці 5.2 для цього методу. Простежимо, як буде змінюватись план перевезень (якщо він не є оптимальним) з оцінкою кожного разу поточного значення загальної вартості перевезень. Найвірогідніше, що ця вартість має поступово зменшуватись за рахунок поліпшення плану перевезень. У нашому випадку отримано число ненульових перевезень (*m*+*n*-1)=6, тому ні додавання, ні зменшення не вимагається. Далі перевіряємо, чи зміниться в бік зменшення вартості план перевезень, якщо почергово робити спробу перемістити одиницю вантажу в кожну незайняту клітинку. В цьому випадку кожну незайняту клітинку помістимо у вершину контуру, в інших вершинах якого розташовані зайняті клітинки. Наприклад, для незайнятої клітинки A_1B_3 таким контуром буде:

$$A_1B_3 \Rightarrow A_1B_2 \Rightarrow A_2B_2 \Rightarrow A_2B_3 \Rightarrow A_1B_3$$

Для кожного такого контуру знаходимо вартісну характеристику переміщення одиниці вантажу в незайняту клітинку (a_{ij}), не змінюючи баланс сум перевезень в рядках та стовпчиках. Для переміщення, наприклад, 1т вантажу в A_1B_3 отримуємо збільшення вартості на ($C \cdot l_{13}$), але для збереження балансу вантажів в рядках і стовпчиках зменшуємо на 1т вантаж в клітинці A_1B_2, що викличе зменшення вартості перевезень на ($C \cdot l_{12}$). Оскільки x_{12} зменшується на 1 т, додамо в клітинку A_2B_2 також 1 т, що викличе збільшення вартості перевезення на ($C \cdot l_{22}$). Однак збільшення x_{22} на 1 т повинно призвести до зменшення x_{23} на 1 т, тобто до зменшення вартості перевезень на ($C \cdot l_{23}$). Це зменшення x_{23} буде скомпенсоване раніше проведеним додаванням 1 т в незайняту клітинку A_1B_3. Таким чином, додавання 1 т в незайняту клітинку A_1B_3 призведе до зміни вартості на величину вартісної характеристики (при C=1 грн/ткм):

$$\alpha_{13} = C \cdot l_{13} - C \cdot l_{12} + C \cdot l_{22} - C \cdot l_{23} = C \cdot (l_{13} - l_{12} + l_{22} - l_{23}) = 1(2 - 7 + 6 - 1) = 0$$

Іншими словами, переміщення одиниці вантажу (або будь-якого об'єму) по контуру $A_1B_3 \Rightarrow A_1B_2 \Rightarrow A_2B_2 \Rightarrow A_2B_3 \Rightarrow A_1B_3$ не викличе зміни вартості перевезень, тобто така модернізація початкового плану недоцільна. Відзначимо, що вартість C=1 грн/ткм входить в α_{13} як додатній коефіцієнт при алгебраїчній сумі відстаней по даному контуру, тому будемо визначати α_{ij} в незайнятій (*ij*)-й клітинці як алгебраїчну суму відстаней по даному контуру, причому для даної незайнятої клітинки ця відстань приймається завжди зі знаком "+", потім за мірою просування по контуру (або в одну, або в іншу сторону - напрям проходження контуру не має значення) відстані l_{ij} приймають послідовно знаки "-" або "+". Якщо отримане значення α_{ij} для (*ij*)-ї незайнятої клітинки буде від'ємним, то це свідчить про те, що переміщення вантажу в цю точку знижують загальну вартість перевезень, якщо ж α_{ij}>0, то переміщення в цю точку збільшується вартість перевезень; якщо α_{ij}=0 то вартість перевезень не змінюється.

Визначаємо α_{ij} для всіх незайнятих клітинок:

$\alpha_{13} = 2 - 7 + 6 - 1 = 0;$ $\alpha_{14} = 5 - 7 + 6 - 1 + 6 - 2 = 7;$ $\alpha_{21} = 3 - 4 + 7 - 6 = 0;$

$\alpha_{24} = 8 - 1 + 6 - 2 = 11;$ $\alpha_{31} = 9 - 4 + 7 - 6 + 1 - 6 = 1;$ $\alpha_{32} = 3 - 6 + 1 - 6 = -8$

Таким чином, доцільно перерозподілити обсяги перевезень базового плану по контуру $A_3B_2 \Rightarrow A_2B_2 \Rightarrow A_2B_3 \Rightarrow A_3B_3 \Rightarrow A_3B_2$ з метою завантаження клітинки A_3B_2, що має α_{32}=-8. Будуємо цей контур з вказанням знаків, що переміщуються і позначаємо додавання або зменшення об'ємів перевезень по даному контуру. Об'єм, що переміщається, визначається як мінімальний з від'ємних об'ємів по даному контуру (x_{33} =70). Таким чином, переміщення вантажу x_{33} =70 по даному контуру дозволить максимально завантажити клітинку A_3B_2 і повністю розвантажити клітинку A_3B_3. Очевидно, що при цьому x_{22} стане рівним (80-70)=10, а x_{23} стане рівним (40+70)=110.Інші значення для даного контуру x_{32}=70; x_{33}=70-70=0. Очевидно, що загальна вартість перевезень повинна при цьому змінитися на: $\Delta L = C \cdot \alpha_{32} \cdot x_{32} = 1 \cdot (-8) \cdot 70 = -560$ грн., і має бути рівною $L + \Delta L = 1540 - 560 = 980$ грн.

Щоб перевірити скоректований план на оптимальність, будуємо таблицю для отримання нового плану, і знову перевіряємо його на оптимальність з допомогою вартісних характеристик незайнятих клітинок. Нагадаємо, що план є оптимальним в тому випадку, якщо всі вартісні характеристики незаповнених клітинок будуть невід'ємними ($\alpha_{ij} \ge 0$).

Таблиця 6.1

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси $\boldsymbol{a_i}$
A_1	80^4	20^7	^{2}	^{5}	100
A_2	^{3}	10^6	110^1	^{8}	120
A_3	^{9}	70^3	^{6}	70^2	140
Заявки $\boldsymbol{b_j}$	80	100	110	70	360

Для отриманого плану:

$\alpha_{13} = 2 - 7 + 6 - 1 = 0;$ $\alpha_{14} = 5 - 7 + 3 - 2 = -1;$ $\alpha_{21} = 3 - 4 + 7 - 6 = 0;$

$\alpha_{24} = 8 - 6 + 3 - 2 = 1;$ $\alpha_{31} = 9 - 4 + 7 - 3 = 9;$ $\alpha_{32} = 6 - 3 + 6 - 1 = 8$

Перевіряємо загальну вартість перевезень:

L_1=980 грн., що співпадає з очікуваною вартістю перевезень. Але цей план не є також оптимальним, так як $\alpha_{14} = -1$, тому будуємо замкнутий контур для клітинки A_1B_4, що має $\alpha_{14} = -1$, і переносимо (згідно контуру в таблиці) x_{12}=20 в клітинку A_1B_4. Знову заповнюємо транспортну таблицю для скоректованого плану. При цьому зменшення вартості повинно складати $C \cdot \alpha_{14} \cdot x$, а загальна вартість

$L_2 = L_1 + \Delta L = 980 + C \cdot \alpha_{14} \cdot x = 980 + 1 \cdot (-1) \cdot 20 = 960$ грн.

Перевіряємо план на оптимальність:

$\alpha_{12} = 7 - 3 + 2 - 5 = 1;$ $\alpha_{13} = 2 - 5 + 2 - 3 + 6 - 1 = 1;$

$\alpha_{21} = 3 - 4 + 5 - 2 + 3 - 6 = -1;$ $\alpha_{24} = 8 - 6 + 3 - 2 = 3;$

$\alpha_{31} = 9 - 4 + 5 - 2 = 8;$ $\alpha_{33} = 6 - 3 + 6 - 1 = 8.$

Таблиця 6.2

j / i	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси $\boldsymbol{a_i}$
A_1	80^4	^{7}	^{2}	20^5	100
A_2	^{3}	10^6	110^1	^{8}	120
A_3	^{9}	90^3	^{6}	50^2	140
Заявки $\boldsymbol{b_j}$	80	100	110	70	360

План знову не є оптимальним, так як $\alpha_{21} = -1$. Наряду з цим загальна вартість складає: L_2=960 грн., що співпадає з очікуваною вартістю перевезень. Переносимо x_{22}=10 в клітинку

A_2B_1 по зазначеному в таблиці контуру. Зміна вартості перевезень повинна складати $C \cdot \alpha_{14} \cdot x = -10$ грн., а загальна вартість перевезень становитиме: $L_3 = L_1 + \Delta L = 960 + C \cdot \alpha_{14} \cdot x = 960 + 1 \cdot (-1) \cdot 10 = 950$ грн. Будуємо знову скоректовану таблицю. Перевіряємо план на оптимальність:

$\alpha_{12} = 7 - 5 + 2 - 3 = 1; \quad \alpha_{13} = 2 - 4 + 3 - 1 = 0;$

$\alpha_{22} = 6 - 3 + 4 - 5 + 2 - 3 = 1;$

$\alpha_{31} = 9 - 4 + 5 - 2 = 8; \quad \alpha_{33} = 6 - 1 + 3 - 4 + 5 - 2 = 7.$

Оскільки всі $\alpha_{ij} \geq 0$, то план перевезень є оптимальним і забезпечує витрати на перевезення на суму:

$L_{опт}$=950 грн., яка відповідає попереднім розрахункам вартості перевезень, що очікується.

Таблиця 6.3

j / *i*	B_1	B_2	B_3	B_4	Запаси $\boldsymbol{a_i}$
A_1	70^4	^{7}	^{2}	30^5	100
A_2	10^3	^{6}	110^1	^{8}	120
A_3	^{9}	100^3	^{6}	40^2	140
Заявки $\boldsymbol{b_j}$	80	100	110	70	360

Таким чином, оптимальний план перевезень передбачує перевезення:

- від складу A_3: до споживача B_1 в обсязі 70 т;
  до споживача B_4 в обсязі 30 т;
- від складу A_2: до споживача B_1 в обсязі 10т;
  до споживача B_3 в обсязі 110т;
- від складу A_3: до споживача B_2 в обсязі 100 т;
  до споживача B_4 в обсязі 40 т.

При цьому загальна вартість перевезень $L_{опт}$= 950 грн.

Зазначимо, що при застосуванні опорного плану, отриманого за допомогою методу північно-західного кута, оптимальний план перевезень був отриманий за три ітерації (тобто три корегування плану). Очевидно, що використання більш досконалого опорного плану має зменшити кількість необхідних ітерацій для отримання оптимального плану.

2. Задача. Мається чотири постачальника (***A$_i$***) і п'ять споживачів (***B$_j$***) вантажу. Наявність вантажу у відправників (***a$_i$***), потреба його у споживачів (***b$_j$***) та відстані між ними наведені в табл. 4.4. Потрібно знайти оптимальний план закріплення споживачів за постачальниками розподільчим методом, забезпечив мінімум транспортної роботи.

Таблиця 6.4

Наявність та потреба вантажу. Відстані поміж постачальниками та споживачами

Постачальник	Споживач						Наявність вантажу, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	
A_1	7+i	2+j	4+i	11-j	6+j	3+i	80+10j
A_2	2+j	6+i	3+j	12-i	7+i	10-j	220-5j
A_3	8+j	12-i	9+j	4+i	13-j	8+i	150-5j
A_4	18-i	6+j	12+i	17-j	15-i	13-j	50+15i
A_5	16-j	18-i	15-i	4+i	5+j	7+j	150-15i
Потреба вантажу, b_j	110+5i	80+5i	120-5i	140-5i	70+5j	130-5j	650

Примітка – *i* = *j* відповідають номеру за алфавітним списком студентів групи (від 1 до 9), усі інші починаючи з 10 – *i* = першій цифрі, а *j* = другій цифрі номеру.

Контрольні питання:

1. Постановка транспортної задачі.
2. Складання опорного плану перевезень методом Фогеля.
3. Складання опорного плану перевезень Угорським методом.
4. Розподільчий метод оптимізації опорного плану перевезень.
5. Метод оптимізації опорного плану перевезень – потенціалів.

Література [1, 3, 6, 7, 8, 9]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 7. Визначення найкоротших відстаней між пунктами транспортної мережі методом потенціалів

Мета заняття: придбати практичні навички визначення найкоротших відстаней між вершинами транспортної мережі.

Завдання:

1. Ознайомитись з методом потенціалів складання матриці найкоротших відстаней між вершинами транспортної мережі.
2. Скласти матрицю найкоротших відстаней між вершинами транспортної мережі.

1. Складання матриці найкоротших відстаней між вершинами транспортної мережі методом потенціалів

Початковій вершині, від котрої знаходять найкоротші відстані, надають потенціал, який дорівнюється нулю (P_i=0). Визначають ланки, для котрих обрана вершина (***i***) є початковою, і розраховують потенціали кінцевих вершин цих ланок за формулою:

$$P_j = P_i + l_{ij} \qquad (7.1)$$

де l_{ij} – довжина ланки ($i - j$), тобто відстань між вершинами ***i*** та ***j***.

Знаходять найменший з усіх потенціалів і надають йому значення відповідної кінцевої вершини. Визначають стрілкою шлях до ланки, який веде в цю кінцеву вершину, а її приймають за початкову. Таким чином, розглядаються усі ланки, в котрих один із потенціалів не визначений.

Приймають за початок мережі послідовно кожну вершину і за описаною послідовністю знаходять найкоротші відстані між усіма вершинами мережі. Результати заносять до таблиці, котра і буде матрицею найкоротших відстаней.

2. Задача. Надана транспортна мережа. Відстані між вершинами наведені на рис.5.1 по варіантам. Варіант обирається за номером по алфавітному списку групи (i = j відповідають номеру від 1 до 9, усі інші починаючи з 10 – i = першій цифрі, а j = другій цифрі номеру). Визначити найкоротші відстані між усіма вершинами транспортної мережі методом потенціалів.

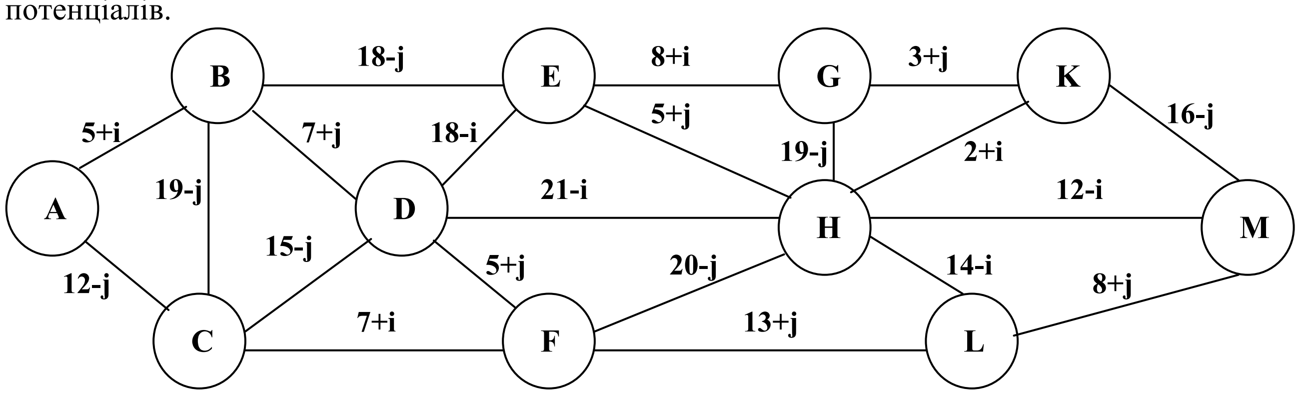


Рис.7.1. Транспортна мережа

Контрольні питання:

1. Складання матриці найкоротших відстаней між вершинами транспортної мережі методом потенціалів.

Література: [1, 5, 6, 9]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 8. Застосування методу динамічного програмування для вирішення задачі завантаження транспортного засобу. Задача рюкзака

Мета: опанування методу динамічного програмування для вирішення задач з завантаження транспортного засобу.

Завдання:

1. Ознайомитись з постановкою транспортної задачі динамічного програмування.
2. Ознайомитись з методом вирішення завантаження транспортного засобу.
3. Вирішити поставлену транспортну задачу за допомогою методу динамічного програмування.

1. Постановка транспортної задачі динамічного програмування

Динамічне програмування являє собою математичний метод оптимізації систем, функціонування яких представляє певну низку багатокрокових операцій. Уявимо собі, що досліджувані операції являють собою, процес, що розвивається в часі і який розділяється на ряд «кроків». Елементарні «крокові» управління і являють собою *стратегію управління.*

Принцип ДП базується на тому, що кожне крокове управління повинно вибиратися з урахуванням усіх його наслідків у майбутньому. Цей принцип сформульований американським вченим Робертом Беллманом, говорить, що *незалежно від того, який стан системи і яке прийняте рішення в початковий момент, наступні рішення і отже поводження системи має бути оптимальним з урахуванням саме майбутніх наслідків.*

Однак з цього загального правила є одне єдине виключення: останній крок, який може просто плануватися як оптимальний у рамках ЛП (без урахування наслідків), і який має приносити безумовно максимальну вигоду.

Таким чином, спланувавши цей останній крок, можна до нього пристроювати передостанній і т.д. до початкового кроку. Саме тому процес ДП розвертається, як правило, від кінця до початку.

Таким чином, при оптимізації систем методом ДП багатокроковий процес проходить двічі:

- від кінцевого кроку до початкового, при цьому знаходяться *оптимальні умовні управління;*

- від початкового кроку до кінцевого, при цьому знаходяться серед множини умовних оптимальних управлінь уже реальні оптимальні управління на кожному кроці з урахуванням результатів попереднього кроку (як початкові умови наступного).

Задача завантаження транспортного засобу. Задача рюкзака

Задача завантаження транспортного засобу (задача рюкзака) відноситься до ДП. Необхідно завантажити транспортний засіб за умови обмеженої вантажопідйомності засобу і досягти максимальної вартості вантажу. Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$\boldsymbol{L} = \sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{v}_i \boldsymbol{x}_i \to \max \tag{8.1}$$

при обмеженні:

$$\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{g}_i \boldsymbol{x}_i \le \boldsymbol{G} \left(\boldsymbol{i} = \overline{\mathbf{1}, \boldsymbol{n}}\right), \tag{8.2}$$

де $\boldsymbol{v}_i$ - вартість $\boldsymbol{i}$-го вантажу, тис. грн.; $\boldsymbol{g}_i$ - вага, тонн; $\boldsymbol{x}_i$ - кількість $\boldsymbol{i}$-го вантажу; $\boldsymbol{G}$ - вантажопідйомність транспортного засобу.

Необхідно, завантажити транспортний засіб вантажопідйомністю $\boldsymbol{G}$=30тонн, трьома видами вантажу з різною вагою, за умови максимальної вартості транспортуємого вантажу, дані наведені у табл. 8.1.

Таблиця 8.1.

Дані транспортуємого вантажу				
Вид вантажу	Кількість, шт.	Вага, тонн	Вартість, тис. грн.	Максимальна кількість, шт.
1	X_1	7	3	4
2	X_2	9	5	3
3	X_3	12	7	2

Процес завантаження розбивається на три етапи. Згідно з принципом ДП, розрахунки починаються із становища, для якого рішення є відомим.

Перший етап. Розглянемо завантаження засобу лише вантажем X_1 або X_2 та їх комбінації.

X_2	X_1					
	Кіл-сть	***0***	***1***	***2***	***3***	***4***
	Вага	***0***	***7***	***14***	***21***	***28***
0	***0***	**0**	7	14	21	28
1	***9***	**9**	16	23	**30**	
2	***18***	**18**	25	32		
3	***27***	**27**	34			

Розглянемо результати завантаження вантажами X_1 та X_2, вибрав максимальну вагу з кожної діагоналі таблиці за умови $G \leq 30$ т (максимальні значення виділені): 0; X_2=1(9т); X_2=2(18т); X_2=3(27т); (X_2=1(9т) + X_1=3(21т))=30т.

Другий етап. Розглянемо завантаження засобу вантажем X_{1+2} або X_3 та їх комбінації.

X_3	X_{1+2}					
	Кіл-сть	***0***	1_2	2_2	3_2	$4(3_1+1_2)$
	Вага	***0***	***9***	***18***	***27***	***30***
0	***0***	**0**	9	18	27	**30**
1	***12***	**12**	21	**30**	39	
2	***24***	**24**	33	42		

Розглянемо результати завантаження вантажами X_{1+2} та X_3, вибрав максимальну вагу з кожної діагоналі таблиці за умови $G \leq 30$ т (максимальні значення виділені): 0; X_3=1(12т); X_3=2(24т); (X_3=1(12т)+X_2=2(18т))=30т; (X_2=1(9т)+X_1=3(21т))=30т.

Третій етап. Розглянемо отримані оптимальні умовні управління, вибравши з останнього етапу результати, які повністю задовольняють умові вантажопідйомності:

1. (X_3=1(12т)+X_2=2(18т))=30т;
2. (X_2=1(9т)+X_1=3(21т))=30т.

Підрахуємо вартість цих варіантів:

1. $L = v_3 x_3 + v_2 x_2 =$ 7+5*2=17 тис. грн.;
2. $L = v_2 x_2 + v_1 x_1 =$ 5+3*3=14 тис. грн.

Висновок: доцільно завантажити транспортний засіб двома вантажами другого виду (X_2=2(18т)) та одним третього (X_3=1(12т)), це відповідає умові вантажопідйомності (G=30т) та поставленій меті у вигляді максимальної вартості транспортуємого вантажу.

3. Транспортна задача

Застосовуючи розглянутий метод динамічного програмування вирішити транспортну задачу, яка полягає в оптимальному завантаженні транспортного засобу чотирма видами вантажу за умови обмеженості вантажопідйомності та поставленій меті – максимально мій вартості транспортує мого вантажу. Дані наведені у табл. 8.2.

Математична модель цієї задачі має вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{n} v_i x_i \to \max,$$

при обмеженні: $$\sum_{i=1}^{n} g_i x_i \le G \left(i = \overline{1,n}\right),$$

де v_i - вартість i-го вантажу, тис. грн.; g_i - вага, тонн; x_i - кількість i-го вантажу; G - вантажопідйомність транспортного засобу.

Таблиця 8.2

Варіанти	Дані транспортуємого вантажу			
	Вантажопідйомність G, тонн.	Кількість, шт.	Вага, тонн	Вартість, тис. грн.
1	20	x_1, x_2, x_3, x_4	5, 7, 9, 10	3, 5, 7, 8
2	24	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 11	5, 4, 6, 10
3	30	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 9, 12, 14	4, 5, 9, 12
4	24	x_1, x_2, x_3, x_4	5, 7, 9, 10	5, 3, 6, 10
5	40	x_1, x_2, x_3, x_4	7, 9, 12, 15	5, 8, 9, 12
6	36	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 11	5, 3, 6, 10
7	30	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 9, 12, 14	4, 5, 9, 12
8	24	x_1, x_2, x_3, x_4	5, 7, 9, 10	5, 3, 6, 10
9	36	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 9, 12, 14	4, 5, 9, 12
10	26	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 11, 13	5, 4, 8, 10
11	20	x_1, x_2, x_3, x_4	4, 6, 9, 10	3, 5, 7, 8
12	24	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 12	5, 8, 11, 14
13	40	x_1, x_2, x_3, x_4	8, 10, 12, 13	7, 8, 9, 12
14	24	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 12	5, 6, 8, 10
15	44	x_1, x_2, x_3, x_4	7, 9, 12, 16	6, 8, 9, 12
16	36	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 11	5, 3, 6, 10
17	30	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 9, 12, 14	4, 5, 9, 12
18	24	x_1, x_2, x_3, x_4	5, 7, 9, 10	5, 3, 6, 10
19	36	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 9, 12, 14	7, 8, 9, 12
20	26	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 12	5, 4, 8, 10
21	24	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 12	5, 6, 8, 10
22	44	x_1, x_2, x_3, x_4	7, 9, 12, 16	6, 8, 9, 12
23	36	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 8, 10, 11	5, 3, 6, 10
24	30	x_1, x_2, x_3, x_4	6, 9, 12, 14	4, 5, 9, 12
25	40	x_1, x_2, x_3, x_4	8, 10, 12, 13	7, 8, 9, 12

Контрольні питання:

1. Визначення методу динамічного програмування.
2. Принцип методу динамічного програмування. Задача рюкзака.
3. Динамічне програмування орієнтованої мережі (алгоритм Кука та Холсея).

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 9. Рішення транспортної задачі лінійного програмування в мережній постановці

Мета заняття: придбати практичні навички рішення транспортної задачі лінійного програмування в мережній постановці.

Завдання:

1. Отримати матрицю найкоротших відстаней.
2. Скласти опорний план перевезень вантажів.
3. Скласти оптимальний план закріплення постачальників вантажів до замовників.

Задача. Надана мережа автомобільних шляхів, довжина ланок мережі зображена на рис.7.1 по варіантам (***i = j*** відповідають номеру за списком (від 1 до 9), усі інші починаючи з 10 – ***i*** = першій цифрі, а ***j*** = другій цифрі номеру). В вершинах мережі розташовані пункти відправлення вантажу A_i (i = 1…m), пункти призначення B_j (j = 1…n) і вільні (транзитні) пункти $Д_k$ (k = 1…p). Наявність вантажу у відправників і потреба в вантажі споживачів, надана по варіантам в табл.7.1, 7.2 (починаючі з 10 номеру за списком – варіант визначається за другою цифрою).

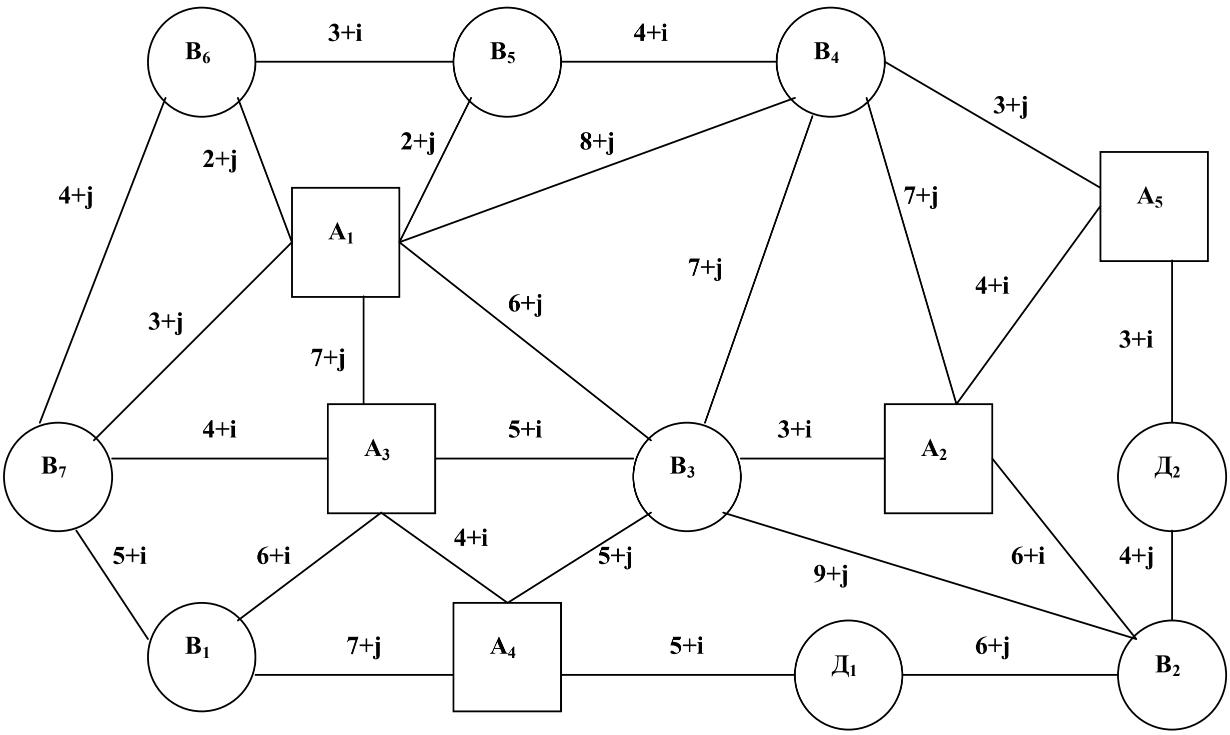


Рис.9.1. Мережа автомобільних шляхів

Таблиця 9.1

Потреба у вантажі

Варіант	Споживачі							Всього
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	
0	55	40	35	95	65	45	55	390
1	185	95	95	125	125	115	110	850
2	85	95	135	65	45	65	60	550
3	140	135	125	130	90	105	75	800
4	120	95	180	150	105	150	120	920
5	130	150	110	90	55	95	120	750
6	120	110	135	165	190	130	100	950
7	120	110	35	165	90	80	150	750
8	80	75	90	70	125	120	80	640
9	65	50	40	75	45	55	50	380

Таблиця 9.2

Наявність вантажів у постачальників

Варіант	Постачальники					Всього
	A_1	**A_2**	**A_3**	**A_4**	**A_5**	
0	110	70	100	50	60	390
1	190	200	160	60	240	850
2	130	150	100	80	90	550
3	50	300	200	150	100	800
4	120	100	400	200	100	920
5	100	200	150	100	200	750
6	250	110	90	300	200	950
7	180	120	150	150	150	750
8	160	130	150	110	90	640
9	90	90	80	70	50	380

Контрольні питання:

1. Постановка транспортної задачі.
2. Складання транспортної таблиці.
3. Складання опорного плану перевезень методами північно-західного кута, мінімальних елементів, Фогеля, Угорським.
4. Метод оптимізації опорного плану перевезень – розподільчий та потенціалів.

Література [1, 3, 6, 7, 8, 9]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 10. Складання опорного плану перевезень незбалансованої транспортної задачі

Мета: опанування методами складання опорного плану перевезень незбалансованої транспортної задачі.

Завдання:

1. Ознайомитись з постановкою незбалансованої транспортної задачі лінійного програмування.
2. Ознайомитись з методами розв’язання незбалансованої транспортної задачі лінійного програмування.
3. Вирішити поставлену транспортну задачу лінійного програмування.

1. Постановка незбалансованої транспортної задачі.

Класична задача складання оптимального плану перевезень вантажів від постачальників вантажів (припустимо, складів) до ***n*** замовників цих вантажів. Припустимо, що постачальники $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ мають у наявності відповідні обсяги вантажів $a_i \left(i = \overline{1; m}\right)$. За рахунок цих вантажів необхідно задовольнити замовлення клієнтів $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ в обсягах відповідно $b_j \left(j = \overline{1; n}\right)$.

Відомими є відстані від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$, тобто $\left\| l_{ij} \right\|_n^m$. Відома також вартість тонно-кілометра транспортної роботи ($С_{ткм}$). Для спрощення будемо вважати, що вантаж однотипний, тобто $С_{ткм}$ однакова для будь-якого постачальника і клієнта. Необхідно визначити обсяги перевезень від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ тобто елементи матриці $\left\| x_{ij} \right\|$, що забезпечують мінімізацію загальних витрат на здійснення всіх перевезень. Формалізуємо вказану задачу.

1) Цільова функція (загальна вартість перевезень) матиме вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} C_{ткм} \cdot l_{ij} \cdot x_{ij} = C_{ткм}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} l_{ij} \cdot x_{ij} \to \min \quad (10.1)$$

2) Загальний обсяг вантажів, що вивозиться, не повинен перевищувати наявність обсягів вантажів у постачальників, тобто:

$$\begin{cases} \sum x_{1j} \le a_1 \\ \sum x_{2j} \le a_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum x_{mj} \le a_m \end{cases} \quad \textit{або} \quad \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \le a_i \ \ (\text{при } i=1,2,\ldots,\boldsymbol{m}) \quad (10.2)$$

3) Усі заявки клієнтів мають бути задоволеними, тобто:

$$\begin{cases} \sum x_{i1} = b_1 \\ \sum x_{i2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \sum x_{in} = b_n \end{cases} \quad \textit{або} \quad \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j \ \ (\text{при } j=1,2,\ldots,\boldsymbol{n}) \quad (10.3)$$

Ця задача має назву транспортної задачі (Т-задачі). Як і для попередньої, для цієї задачі залишається у силі вимога $x_j \ge 0 \left(j = \overline{1; n}\right)$.

Якщо вимога балансу "попиту" і "пропозиції" не має місця, тобто $\sum_{i=1}^{m} a_i \ne \sum_{j=1}^{n} b_j$.

Наприклад, $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$,то обмеження (10.3) залишаються у вигляді рівнянь, а обмеження (10.2) - у вигляді нерівностей, тоді така транспортна задача відноситься до ЗЛПН. Аналогічно для випадку $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$ ("попит" перевищує "пропозицію") маємо (10.2) у вигляді обмежень-рівнянь, а (10.3) - в вигляді обмежень-нерівностей. Транспортна задача у такій постановці носить назву відкритої (незбалансованої) ТЗ, де $\sum_{i=1}^{m} a_i \ne \sum_{j=1}^{n} b_j$.

2. Методи розв'язання незбалансованої транспортної задачі лінійного програмування

В практиці перевезень найчастіше вимога збалансованості не задовольняється, тому кожного разу необхідно незбалансовану ТЗ зводити до збалансованої. Якщо сума заявок не відповідає сумарному об'єму запасів, то ТЗ є незбалансованою. При цьому можливі два випадки:

1. При $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j$ маємо надмір запасів. В цьому випадку для отримання збалансованої ТЗ уводимо додаткового (фіктивного) $(n+1)$-го одержувача з відстанями до постачальників, рівними нулю, що буде свідчити про те, що перевезення цьому споживачу не змінять загальну вартість перевезень. Вирішення даної ТЗ проводиться як для звичайної збалансованої ТЗ.

2. При $\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j$, маємо перевищення попиту на перевезення щодо можливостей постачальників. Це означає, що не всі заявки будуть задовільнені. В цьому випадку вводиться фіктивний $(m+1)$-й постачальник з об'ємом, рівним об'єму, якого бракує, і з відстанями, рівними нулю. Вирішення даної ТЗ проводиться як звичайної збалансованої ТЗ.

У випадку, коли доцільно "не задовольнити" рівною мірою всі заявки, то "фіктивний" $(m+1)$-й постачальник не вводиться, а розраховується коефіцієнт зменшення заявок:

$K_f = \frac{\sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i}{\sum_{j=1}^{n} b_j}$, після чого заявки b_j, що надійшли, зменшуються до $b_j^{'} = (1 - K_f) b_j$ і задача стає збалансованою з запасами a_i при тих же розмірах ТЗ.

3. Транспортна задача

Скласти оптимальний план перевезень вантажів від постачальників вантажів (використовуючи всі вище зазначені методи) до ***n*** замовників цих вантажів. Постачальники $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ мають у наявності відповідні обсяги вантажів $a_i \left(i = \overline{1; m}\right)$. За рахунок цих вантажів необхідно задовольнити замовлення клієнтів $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ в обсягах відповідно $b_j \left(j = \overline{1; n}\right)$.

Відомими є відстані від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$, тобто $\left\| l_{ij} \right\|_n^m$. Відома також вартість тонно-кілометра транспортної роботи ($С_{ткм}$). Для спрощення будемо вважати, що вантаж однотипний, тобто $С_{ткм}$ однакова для будь-якого постачальника і клієнта. Необхідно визначити обсяги перевезень від $A_i \left(i = \overline{1; m}\right)$ до $B_j \left(j = \overline{1; n}\right)$ тобто елементи матриці $\left\| x_{ij} \right\|$, що забезпечують мінімізацію загальних витрат на здійснення всіх перевезень. Формалізуємо вказану задачу.

Цільова функція (загальна вартість перевезень) матиме вигляд:

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} C_{ткм} \cdot l_{ij} \cdot x_{ij} = C_{ткм} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} l_{ij} \cdot x_{ij} \to \min$$

Числові дані всіх приведених даних зведені у таблиці 10.1 вихідних даних. Номер варіанта відповідає номеру за алфавітним списком студентів групи.

Таблиця 10.1

Наявність та потреба вантажу. Відстані поміж постачальниками та споживачами

Постачальник	Споживач								Наявність вантажу, a_i
	B_1	B_2	B_3	B_4	B_5	B_6	B_7	B_8	
A_1	7+i	2+j	4+i	11-j	6+j	3+i	9+j	14-i	75+10j
A_2	2+j	6+i	3+j	12-i	7+i	10-j	5+j	4+j	220-5j
A_3	8+j	12-i	9+j	4+i	13-j	8+i	7+i	10+j	150-4j
A_4	18-i	6+j	12+i	17-j	15-i	13-j	4+i	2+i	50+20i
A_5	16-j	18-i	15-i	4+i	5+j	7+j	3+i	21-j	200-5i
A_6	19-j	6+i	21-j	2+j	23-i	17-i	14-j	12-i	150-5i
Потреба вантажу, b_j	60+5i	80+10i	120-5i	140-5i	100+5j	120-5j	90+5j	160-10j	

Примітка – *i* = *j* відповідають номеру за алфавітним списком студентів групи (від 1 до 9), усі інші починаючи з 10 – *i* = першій цифрі, а *j* = другій цифрі номеру.

Контрольні питання:

1. Постановка транспортної задачі.
2. Незбалансована транспортна задача.
3. Метод розв'язання незбалансованої транспортної задачі лінійного програмування.

Література [1, 2, 6, 8, 9, 10]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 11. Аналіз систем масового обслуговування

Мета: опанувати методи розрахунку і фізичний зміст основних показників роботи систем масового обслуговування (СМО).

Завдання:

1. Ознайомитись з основами теорії роботи систем масового обслуговування.
2. Ознайомитись з представленими системами розрахунку основних показників роботи систем масового обслуговування.
3. Вирішити поставлену задачу аналізу роботи системи масового обслуговування, використовуючи представлені системи розрахунків.

1. Основи теорії роботи систем масового обслуговування

Робота будь-якої СМО - це обслуговування вхідного потоку заявок (вимог на обслуговування), що надходить в СМО у випадкові моменти часу з інтенсивністю **λ**. Обслуговування заявок заключається у виконанні певного обсягу робіт, передбаченого заявкою, тому час обслуговування однієї заявки (t_{0i}) є також випадковою величиною. Для того, щоб охарактеризувати роботу СМО, звичайно визначають середній час обслуговування $t_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_{0i}$ або інтенсивність потоку обслуговування $\mu = 1/t_0$ (фізично це середнє число обслужених заявок, що покидають СМО за одиницю часу).

Обслуговування заявок в СМО проходить з допомогою каналів обслуговування. Тому СМО класифікуються звичайно за числом каналів, як одноканальні та багатоканальні. В залежності від умов роботи СМО вони можуть бути з очікуванням, коли заявка "терпляче" чекає, у черзі обслуговування і не залишає СМО не обслуженою, а також з обмеженою чергою (з відмовами), коли заявка залишає СМО не обслуженою за наявності черги очікування. Інколи СМО класифікуються також, як СМО з обмеженням часу чекання.

Важливими характеристиками вхідного і вихідного потоків СМО є закон розподілення тривалості інтервалів часу надходження (вибуття) заявок. В загальному випадку цей закон приймається експоненційним, як окремий випадок розподілення Пуассона для однієї події:

$$P_{вх}(t) = 1 - e^{-\lambda t}; \quad P_{вих}(t) = 1 - e^{-\mu t},$$

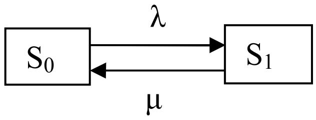
де **λ, μ** - параметри розподілень, що фізично означають інтенсивність відповідного потоку; **t** - інтервал часу, для якого визначається відповідна імовірність ($P_{вх}(t)$ *або* $P_{вих}(t)$). Відмітимо, що у випадку розподілення вхідного або вихідного потоку, відмінного від експоненційного, результати, отримані при їх розгляді як найпростіших пуассонівських, дозволяють, проте, проаналізувати систему за найбільш несприятливих умов, що гарантує результати при непуассонівських потоках не гірші за отримані при їх розгляді пуассонівськими. Тому представлення вхідних і вихідних потоків найпростішими пуассонівськими має широке застосування.

До інших важливих характеристик СМО відносяться абсолютна пропускна спроможність А (середня кількість заявок, яку може обслужити СМО за одиницю часу) і відносна пропускна спроможність $q = A/\lambda$. Як видно, СМО з очікуванням може характеризуватися також середньою довжиною черг і середнім часом очікування в черзі. Нарешті, будь-яка СМО характеризується часом знаходження заявки ($t_{сист}$) від моменту надходження заявки до моменту залишення СМО.

2. Системи розрахунків основних показників роботи систем масового обслуговування

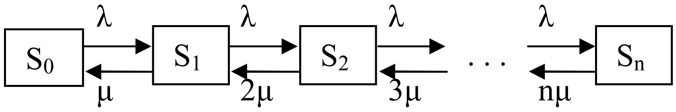
Основні розрахункові формули для найбільш характерних СМО наведені в таблицях 11.1 - 11.6.

Таблиця 11.1

Одноканальна СМО з відмовами	
Граф станів	
Характеристики СМО	Розрахункові формули
Імовірність обслуговування (імовірність стану S_0)	$P_0 = \mu/(\lambda+\mu)$
Імовірність відмови в обслуговуванні (імовірність стану S_1)	$P_{від} = 1 - P_0 = \lambda/(\lambda+\mu)$
Відносна пропускна спроможність (коефіцієнт завантаження СМО)	$q = 1 - P_{від} = P_0 = \mu/(\lambda+\mu)$
Абсолютна пропускна спроможність, (заявки/од.часу)	$A = q\cdot\lambda = \lambda\,\mu/(\lambda+\mu)$
Середній час обслуговування	$\bar{t}_{обс} = 1/A$
Середній час перебування заявки в СМО	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{обс} = 1/A$

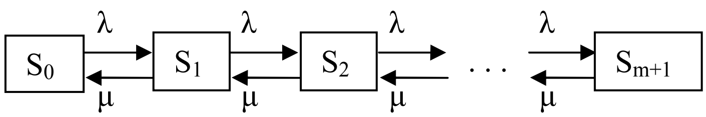
$\mathbf{S_0}$ - стан, коли СМО вільна і чекає заявку на обслуговування; $\mathbf{S_1}$ - стан, коли заявка обслуговується і СМО зайнята.

Таблиця 11.2

Багатоканальна СМО з відмовами (n – кількість каналів)	
Граф станів	
Характеристики СМО	Розрахункові формули
Імовірність станів $P_0; P_1; \dots P_{m+1}$, $\rho = \lambda/\mu$ - приведена інтенсивність заявок (коефіцієнт завантаження СМО)	$P_0 = \left(1 + \rho/1! + \rho^2/2! + \dots + \rho^n/n!\right)^{-1}$ $P_1 = \rho\cdot P_0;\ P_2 = \rho^2/2!\cdot P_0;\ \dots\ P_n = \left(\rho^n/n!\right)\cdot P_0$
Імовірність відмови в обслуговуванні	$P_{від} = P_n = \left(\rho^n/n!\right)\cdot P_0$
Імовірність обслуговування (відносна пропускна спроможність)	$P_{обс} = q = 1 - P_{від} = 1 - \left(\rho^n/n!\right)P_0$
Абсолютна пропускна спроможність, (заявки/од.часу)	$A = q\cdot\lambda = \lambda/(1 - P_n)$
Середня кількість зайнятих каналів	$\bar{k} = A/\mu = \lambda\left(1 - P_n\right)/\mu = \rho\left(1 - P_n\right)$
Середній час обслуговування	$\bar{t}_{обс} = 1/A$
Середній час перебування заявки в СМО	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{обс} = 1/A$

$\mathbf{S_0}$ - стан, коли СМО вільна; $S_{\boldsymbol{i}}$ - в СМО обслуговуванням зайнято ***i***-каналів; $\mathbf{S_n}$ - всі n-каналів зайняті і новим заявкам, що знову надійшли, відмовлено.

Таблиця 11.3

Одноканальна СМО з очікуванням і обмеженням черги (m – максимальна кількість очікувальних заявок)	
Граф станів	

Характеристики СМО	Розрахункові формули
Імовірність станів $P_0; P_1; \dots P_{m+1}$, $\rho = \lambda/\mu$ - приведена інтенсивність заявок	$P_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \dots + \rho^{m+1}\right)^{-1} = (1-\rho)/\left(1-\rho^{m+2}\right)$ $P_1 = \rho \cdot P_0;\ P_2 = \rho^2 \cdot P_0;\ \dots P_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot P_0$
Імовірність відмови в обслуговуванні	$P_{від} = P_{m+1} = \rho^{m+1} \cdot (1-\rho)/\left(1-\rho^{m+2}\right)$
Імовірність відмови в обслуговуванні (відносна пропускна спроможність)	$P_{обс} = q = 1 - P_{від}$
Абсолютна пропускна спроможність	$A = q \cdot \lambda = \lambda\mu/(\lambda+\mu)$
Середня кількість заявок в черзі	$\bar{r} = \rho^2 \cdot \left(1 - \rho^m \cdot (m+1-m\rho)\right)/\left(\left(1-\rho^{m+2}\right) \cdot (1-\rho)\right)$
Середня кількість заявок в СМО	$\bar{k} = \bar{r} + \left(\rho - \rho^{m+2}\right)/\left(1-\rho^{m+2}\right)$
Середній час очікування в черзі	$\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda$
Середній час перебування в СМО	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс} = (\bar{r}/\lambda) + (q/\mu)$

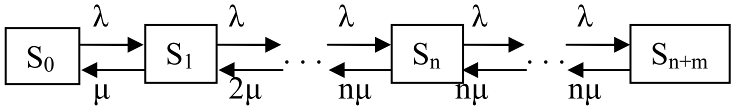
S_0 - стан, коли СМО вільна; S_1 - СМО зайнята; S_i - (i-1) заявка в черзі; S_{m+1} - (m) заявок в черзі.

Таблиця 11.4

Одноканальна СМО з очікуванням і без обмеженням черги	
Граф станів	$S_0 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_1 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_2 \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} \dots \underset{\mu}{\overset{\lambda}{\rightleftarrows}} S_k$
Характеристики СМО	Розрахункові формули
Умова існування граничного стану СМО	$\rho = \lambda/\mu$ - приведена інтенсивність заявок
Імовірність станів $P_0; P_1; \dots P_k$	$P_0 = (1-\rho);$ $P_1 = \rho \cdot P_0 = \rho \cdot (1-\rho);$ $P_k = \rho^k \cdot P_0 = \rho^k \cdot (1-\rho)$
Імовірність відмови в обслуговуванні	$P_{від} = 0$
Імовірність обслуговування (відносна пропускна спроможність)	$P_{обс} = q = 1 - P_{від} = 1$
Абсолютна пропускна спроможність	$A = q \cdot \lambda = \lambda$
Середня кількість заявок в черзі	$\bar{r} = \rho^2/(1-\rho)$
Середня кількість заявок в СМО	$\bar{k} = \bar{r} + \rho = \rho/(1-\rho)$ ρ – ***середня кількість обслуговуваних заявок***
Середній час очікування в черзі	$\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda = \rho^2/(\lambda(1-\rho))$
Середній час перебування в СМО	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{оч} + \bar{t}_{обс} = (\bar{r}/\lambda) + (q/\mu) = 1/(\mu(1-\rho))$

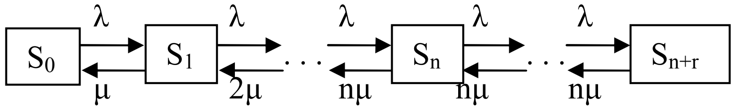
S_0 - СМО вільна; S_1 - СМО зайнята; S_k - на черзі (k-1) заявка.

Таблиця 11.5

Багатоканальна СМО з очікуванням та обмеженням черги (n – кількість каналів; m – максимальна кількість очікувальних заявок)	
Граф станів	
Характеристики СМО	Розрахункові формули
Імовірність станів $P_0; P_1; \ldots P_n; \ldots P_{m+n}$, $\rho = \lambda/\mu$ - приведена інтенсивність заявок, $x = \rho/n$ - приведена інтенсивність на один канал обслуговування	$P_0 = \left(1 + \rho/1! + \rho^2/2! + \ldots + \rho^n/n! + \left(\rho^n/n!\right)\cdot\left(\left(\rho/n\right) - \left(\rho/n\right)^{m+1}\right)/\left(1 - \rho/n\right)\right)^{-1}$; $P_i = \left(\rho^i/i!\right)\cdot P_0$ $\left(\textit{черги нема}, i - \textit{число зайнятих каналів}\left(i \le n\right)\right)$; $P_{n+k} = \left(\rho^{n+k}/n^k n!\right)\cdot P_0$ $\left(\textit{де } k - \textit{заявки в черзі}\left(k \le m\right)\right)$; $P_{n+m} = \left(\rho^{n+m}/n^m n!\right)\cdot P_0$ $\left(\textit{СМО повністю зайняті}\right)$.
Імовірність відмови в обслуговуванні	$P_{від} = P_{n+m} = \left(\rho^{n+m}/n^m n!\right)\cdot P_0$
Імовірність обслуговування (відносна пропускна спроможність)	$P_{обс} = q = 1 - P_{від}$
Абсолютна пропускна спроможність	$A = q \cdot \lambda$
Середня кількість зайнятих каналів	$\bar{z} = A/\mu = \left(1 - \left(\rho^{n+m}/n^m n!\right)\cdot P_0\right)\cdot\rho$
Середня кількість заявок в черзі	$\bar{r} = \left(\rho^{n+1}/\left(n\cdot n!\right)\right)\cdot P_0\cdot\left(\left(1 - \left(m+1\right)\cdot x^m + m\cdot x^{m+1}\right)/\left(1-x\right)^2\right)$
Середній кількість заявок в СМО	$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$
Середній час очікування в черзі	$\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda$
Середній час перебування в СМО	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{оч} + \left(q/\mu\right)$

S_0 - СМО вільна; S_i ($i \le n$) - в СМО зайнято i - каналів; S_n - СМО зайнята повністю; S_{n+k} ($k \le m$) - на черзі k заявок; S_{n+m} - всі місця в черві зайняті.

Таблиця 11.6

Багатоканальна СМО з очікуванням та без обмеженням черги (n – кількість каналів)	
Граф станів	
Характеристики СМО	Розрахункові формули

Імовірність станів $P_0; P_1; \dots P_n; \dots P_{m+r}$	$P_0 = \left(1+\rho/1!+\rho^2/2!+\dots+\rho^n/n!+\left(\rho^{n+1}/n!(n-\rho)\right)\right)^{-1};$ $P_1 = \rho \cdot P_0; P_i = \left(\rho^i/i!\right) \cdot P_0;$ $P_n = \left(\rho^n/n!\right) \cdot P_0$ $(СМО\ зайнята)$; $P_{n+1} = \left(\rho^{n+1}/n \cdot n!\right) \cdot P_0; \dots$ $P_{n+r} = \left(\rho^{n+r}/n^r n!\right) \cdot P_0$ $(r - заявкив\ черзі)$.
Імовірність відмови в обслуговуванні	$P_{від} = 0$
Імовірність обслуговування (відносна пропускна спроможність)	$P_{обс} = q = 1 - P_{від} = 1$
Абсолютна пропускна спроможність	$A = q \cdot \lambda = \lambda$
Середня кількість заявок в черзі	$\bar{r} = \left(\rho^{n+1}/\left(n \cdot n! \cdot (1-x)^2\right)\right) \cdot P_0$
Середня кількість зайнятих каналів	$\bar{z} = A/\mu = \lambda/\mu = \rho$
Середня кількість заявок в СМО	$\bar{k} = \bar{r} + \bar{z}$
Середній час очікування в черзі	$\bar{t}_{оч} = \bar{r}/\lambda$
Середній час перебування в СМО	$\bar{t}_{сист} = \bar{t}_{оч} + (q/\mu)$

S_0 - СМО вільна; S_i ($i \le n$) - в СМО зайнято i - каналів; S_n - СМО зайнята повністю; S_{n+k} ($k \le m$) - на черзі k заявок, S_{n+r} - r заявок на черзі.

3. **Аналіз роботи системи масового обслуговування**

Розглянемо два варіанти задач з теорії систем масового обслуговування:

1) Обчислювальний центр (ОЦ) обладнаний трьома модемами для прийому, обробки та видачі інформації від чисельних АТП, які працюють у паралельному режимі прийому інформації. ОЦ не має буферу для зберігання інформації, що надійшла, коли усі модеми зайняті прийомом та видачею інформації, тому АТП в цьому випадку змушені звертатися знову до ОЦ. Визначити тип та імовірності станів системи масового обслуговування, а також основні характеристики режиму роботи: відносну і абсолютну пропускні спроможності ОЦ, середню кількість зайнятих і вільних модемів, імовірність відмов в прийомі інформації від АТП. Вихідні дані: $\lambda = 0{,}8\ хв^{-1}$, $\overline{t_{обс}} = 1{,}5\ хв$. Потоки – найпростіші.

2) На станцію технічного обслуговування автомобілів (СТО), що має 2 поста обслуговування, надходять для ремонту автомобілі з інтенсивністю $\lambda = 4\ год^{-1}$. Середній час ремонту складає $\overline{t_{обс}} = 0{,}8\ год$. На СТО не передбачені місця чекання. Кожний відремонтований автомобіль приносить СТО чистий прибуток, що складає $C = 40$ грн. Утримання кожного поста обслуговування коштує у середньому $C_1 = 20$ грн./год. Вхідний потік і потік відремонтованих автомобілів – стаціонарні пуассонівські. Необхідно вирішити: вигідно чи невигідно обладнання третього посту обслуговування з метою прискорення процесу ремонту.

3) Бюро замовлень АТП на транспортне обслуговування установ та населення має одну телефонну лінію зв'язку для прийому замовлень на перевезення вантажів, з'єднану з довідковим бюро АТП. Потік телефонних замовлень на перевезення та довідки - стаціонарний пуассонівський потік з інтенсивністю $\lambda = 0.4$ зам/хв. протягом 1 години прийому замовлень. Середня тривалість одного телефонного замовлення $\overline{t_3} = 3$ хв. Розподіл часу замовлення – експоненціальний. Визначити граничні імовірності станів бюро замовлень як СМО, якщо протягом однієї години прийому встановлюється сталий режим.

Перший варіант представленого завдання вирішують студенти, номера за списком яких складають від 1 до 7, другий варіант - від 8 до 15, усі інші розглядають третій варіант задачі з теорії систем масового обслуговування.

Контрольні питання:

1. Функції та узагальнена структура систем масового обслуговування.
2. Класифікація систем масового обслуговування.
3. Пуассонівські потоки.
4. Модель потоку подій з післядією - потік Ерланга.
5. Типовий графи станів систем масового обслуговування.

Література [1, 2, 6, 8, 9, 10]

ПРАКТИЧНЕ ЗАНЯТТЯ 12. Складання, аналіз і оптимізація сітьових графіків виконання комплексу робіт

Мета: опанувати методи побудови сітьових графіків і оптимізації виконання комплексу робіт на основі аналізу структурних таблиць.

Завдання:

1. Ознайомитись з основами теорії побудови сітьових графіків і аналізу структурних таблиць виконання комплексу робіт.
2. Вирішити поставлену задачу аналізу та оптимізації виконання комплексу робіт.

1. Основи теорії побудови сітьових графіків і аналіз структурних таблиць виконання комплексу робіт

Основним матеріалом для сітьового планування є список (перелік) комплексу робіт з наведеним терміном кожної роботи та їх взаємної обумовленості. Назвемо цей перелік структурною таблицею. В цій таблиці для кожної роботи (a_i) повинно бути вказано, виконання яких робіт вона потребує, щоби бути початою (надалі будемо говорити: на які роботи вона опирається).

Наприклад, комплекс робіт по реконструкції будівлі включає 10 видів робіт (проектування, земляні роботи, монтажні і т.д.). Увесь цей комплекс робіт може бути представлений у вигляді структурної таблиці 10.1.

Таблиця 10.1

Робота (a_i)	Опирається на:	Термін виконання (t_i)
a_1	-	10
a_2	-	5
a_3	-	15
a_4	a_1; a_2	18
a_5	a_2; a_3	19
a_6	a_4	18
a_7	a_5; a_6	8
a_8	a_5; a_6	25
a_9	a_7	30
a_{10}	a_8	8

У відповідності в цією таблицею, наприклад, роботи a_7 і a_8 не можуть початися раніше, ніж виконаються роботи a_5 і a_6 і т.д.

Планування виконання комплексу робіт починається завжди з побудови часового графіку, що дозволяє визначити критичні роботи, тобто роботи, що визначають загальну тривалість комплексу робіт, а також резерви часу для некритичних робіт.

Побудова часового графіку починається з початку часової вісі (рис.12.1). Спочатку відкладаються в масштабі роботи, які не опираються ні на які роботи (a_1; a_2; a_3); робота a_4, що опирається на a_1 і a_2, почнеться лише після виконання роботи a_1 і т.д.

Як показує графік (рис.12.1), загальний час виконання всього комплексу робіт (T_0) визначається лише тривалістю робіт a_1, a_4, a_6, a_7, a_9 і рівний $T_0 = t_1 + t_4 + t_6 + t_7 + t_9 = 84$. Ці роботи, що визначаються T_0, називаються критичними, а граф $a_1 \rightarrow a_4 \rightarrow a_6 \rightarrow a_7 \rightarrow a_9$ називається критичним шляхом.

Як витікає з рис.10.1, є певні резерви часу для виконання некритичних робіт (a_2; a_3; a_5; a_8; a_{10}). Так наприклад, робота a_2 може бути почата пізніше, із запізненням, що не перевищує величину резерву часу R_2=5. Роботи a_3 і a_5 можуть бути зсунутими в часі і початі з запізненням, що не перевищує резерв часу $R_{3,5}$=12 без збільшення T_0. Аналогічний резерв часу $R_{8,10}$=5 маємо для початку робіт a_8 і a_{10} без збитків для загального терміну виконання комплексу робіт.

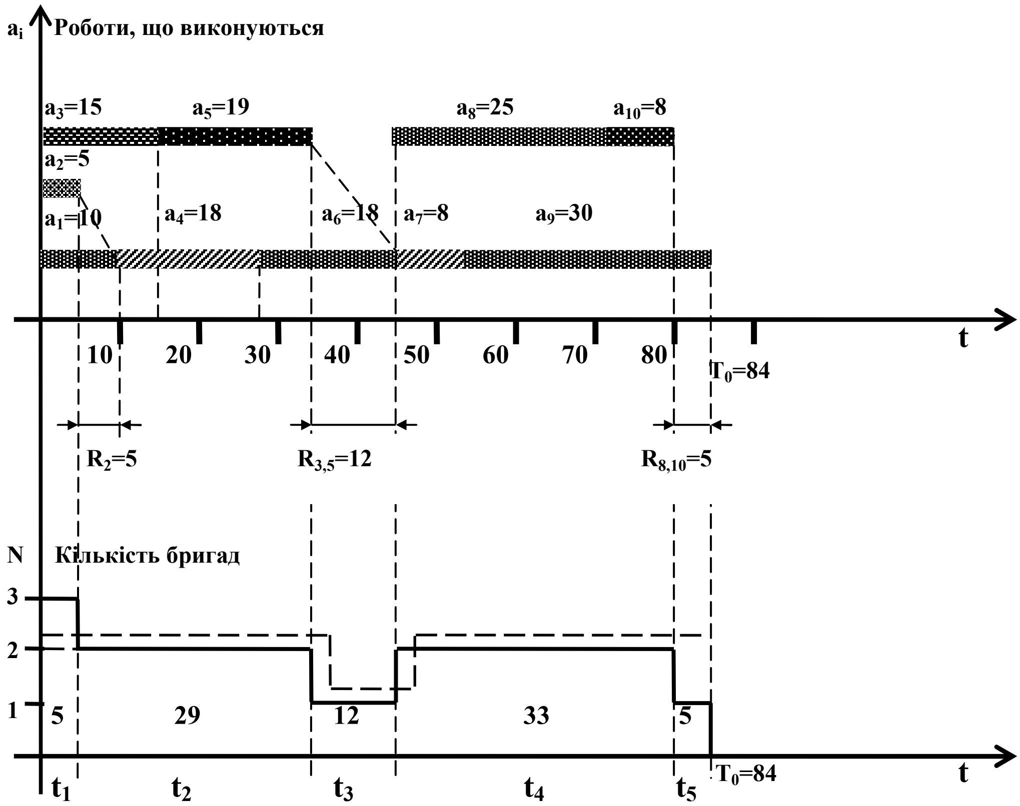


Рис. 12.1 Часовий графік виконання робіт.

Цією обставиною можна скористатися, щоб варіювати робочою силою або іншими ресурсами, збільшуючи тривалість некритичних робіт і скорочуючи тривалість критичних за рахунок притягнення засобів з некритичних робіт (або ж вкладаючи в них додаткові засоби, або людські ресурси).

Найпростіше змінити початок виконання некритичних робіт з метою вирівнювання кількості робіт, що виконуються одночасно. Наприклад, змістивши початок виконання робіт a_3 і a_5 на t=5, можемо оминути одночасне виконання трьох робіт на початковій стадії. Можливо також змістити початок робіт a_8 і a_{10} на t=5 без зміни T_0. В інтервал часу, ідо утворився між a_5 і a_8 і рівний 12, можна використати другу бригаду на інших роботах. Третя ж бригада взагалі не буде задіяна на даному комплексі.

Продемонструємо на основі лінійного графіка виконання робіт, як можна поліпшити використання робочої сили. Припустимо для простоти, що для виконання однієї роботи потрібна одна бригада. Тоді графік використання бригад можна представити як на рис.12.1. За допомогою цього графіка визначаємо:

1) Середня кількість зайнятих бригад

$$N_{зайн} = \frac{1}{T_0}\sum_{i=1}^{5} t_1 \cdot N_i = \frac{1}{84}(5\cdot 3 + 29\cdot 2 + 12\cdot 1 + 33\cdot 2 + 5\cdot 1) = 1{,}857 \ \textit{бригад}$$

2) Дисперсія зайнятості бригад

$$D_{зайн} = \frac{1}{T_0}\left[\sum_{i=1}^{5}(N_i - N_{зайн})^2 \cdot t_i\right] = \frac{1}{84}((3-1{,}857)^2\cdot 5 + (2-1{,}857)^2\cdot 29 + (1-1{,}857)^2\cdot 12 +$$

$$+ (2-1{,}857)^2\cdot 33 + (1-1{,}857)^2\cdot 5) = 0{,}241 \ \textit{бригад}^2$$

3) Середня кількість незайнятих бригад

$$N_{нз} = \frac{1}{T_0}\left[\sum_{i=1}^{5}(N_{i\max} - N_i)\cdot t_i\right] = \frac{1}{84}((3-3)\cdot 5 + (3-2)\cdot 29 + (3-1)\cdot 12 +$$

$$+ (3-2)\cdot 33 + (3-1)\cdot 5) = 1{,}143 \ \textit{бригад}$$

Спробуємо розподілити бригади більш рівномірно. Для цього вмістимо на 5 днів початок виконання робіт a_3 і a_5. Крім того, почнемо на 5 днів пізніше виконання робіт a_8 і a_{10}. Новий графік навантаження бригад покажемо на рис.10.1 пунктиром. Для отримання графіка розподілу робіт маємо:

$$N_{зайн} = \frac{1}{T_0}\sum_{i=1}^{5} t_1 \cdot N_i = \frac{1}{84}(2\cdot 39 + 1\cdot 12 + 2\cdot 33) = 1{,}857 \ \textit{бригад}$$

$$D_{зайн} = \frac{1}{T_0}\left[\sum_{i=1}^{5}(N_i - N_{зайн})^2 \cdot t_i\right] = \frac{1}{84}((2-1{,}857)^2\cdot 39 + (1-1{,}857)^2\cdot 12 +$$

$$(2-1{,}857)^2\cdot 33 = 0{,}112 \ \textit{бригад}^2$$

$$N_{нз} = \frac{1}{T_0}\left[\sum_{i=1}^{5}(N_{i\max} - N_i)\cdot t_i\right] = \frac{1}{84}((2-2)\cdot 39 + (2-1)\cdot 12 + (2-2)\cdot 33 = 0{,}143 \ \textit{бригад}$$

Отримані дані розрахунків свідчать про набагато краще використання робочої сили. Увесь комплекс робіт виконується двома бригадами замість трьох з більшою рівномірністю завантаження.

<u>Можливе отримання тих же результатів табличним методом (див. табл.12.2).</u>

<u>Принцип заповнення таблиці.</u>

У верхньому рядку вказуються роботи, що виконуються, (від a_1 до a_{10}). Колонка 0 і рядок 0 позначають початок комплексу робіт. В колонці (і) вказуються роботи (a_i), на які опирається робота (a_j), що виконується. В точках перетину a_i і a_j вказується тривалість роботи (a_j), що виконується. Ліва крайня колонка $t_i^{(p)}$ - ранні строки виконання робіт від початку всього комплексу. Отримують ці значення шляхом додавання попереднього $t_i^{(p)}$ для роботи, на яку опирається, з тривалістю виконуючої роботи з подальшим вибором максимальної суми.

Наприклад, для a_4 $t_4^{(p)}$=max{10+18; 5+18}=28; для a_5 $t_5^{(p)}$=max{5+19; 15+19}=34; для a_6 $t_6^{(p)}$=max{28+18}=46 і т.д. Після заповнення всіх рядків колонки $t_i^{(p)}$ максимальне з отриманих значень $t_i^{(p)}$ дає значення T_0 = 84.

Рухаючись в зворотному напрямку від a_{10} до a_1 можна визначити $t_{i\,звр}^{(п)}$ – пізній час виконання робіт, що відлічується від кінця комплексу. Для цього приймаємо за "0" закінчення останньої роботи a_{10} (права крайня колонка). Щоб закінчення роботи a_{10} не змінилося, необхідно, щоби робота a_8, на яку опирається a_{10}, закінчилася не пізніше, ніж на $t_{i\,звр}^{(п)}$ =8. Робота ж a_9 не зв'язана з a_{10} і найпізніший термін її виконання може співпасти з a_{10}. Для роботи a_7, що опирається на a_3, $t_{i\,звр}^{(п)}$ =30; для роботи a_7, що опирається на a_5 і a_6, маємо $t_{i\,звр}^{(п)}$ =max{30+8; 8+25}=38 і т.д. Після заповнення всіх значень $t_{i\,звр}^{(п)}$ максимальне з отриманих значень визначить T_0.

Таблиця 12.2

$t_i^{(р)}$	i\j	0	a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7	a_8	a_9	a_{10}	$t_{i\ звр}^{(п)}$
0	0		10	5	15								84
10	a_1					18							74
5	a_2					18	19						74
15	a_3						19						57
28	a_4							18					56
34	a_5								8	25			38
46	a_6								8	25			38
54	a_7										30		30
71	a_8											8	8
84	a_9												0
79	a_{10}												0
$t_i^{(п)}$		0	10	10	27	28	46	46	54	76	84	84	
R_i			0	5	12	0	12	0	0	5	0	5	

Для визначення пізніх строків виконання робіт, що відліковуються від початку комплексу ($t_i^{(п)}$), віднімаємо послідовно від T_0 значення $t_{i\ звр}^{(п)}$ і заповнюємо передостанній рядок $t_i^{(п)}$.

Помічаємо, що для деяких робіт ранні строки $t_i^{(р)}$ і $t_i^{(п)}$не співпадають, їх різниця і визначає резерв часу R_i для кожної роботи (див. останній рядок таблиці).

Роботи, що мають R_i=0, є критичними, для некритичних робіт отримано значення резервів часу, що співпадають з отриманими графічним шляхом. Відмітимо, що графічний метод є більш наочним ї дозволяє глибше зрозуміти резерви графіка робіт і приймати заходи по скороченню строків виконання робіт.

2. Задача аналізу та оптимізації виконання комплексу робіт

Прийняти, що кількість необхідних робіт для здійснення реконструкції дорівнює 10-и умовним роботам (від a_1 до a_{10}), кожна з яких має термін виконання від t_1 до t_{10} відповідно. При цьому деякі з вказаних робіт не можуть розпочатися, доки не завершаться інші роботи. Ця взаємозалежність робіт із зазначенням терміну їх виконання наведена у вигляді структурної таблиці виконання комплексу робіт (табл. 12.3). Варіант структурної таблиці вибирається з наступної таблиці:

Номер за списком (починаючи з 10 - остання цифра)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Варіант	1	2	3	1	2	3	1	2	3	1

<u>До вибраного варіанту:</u>

1. Скласти часовий графік виконання робіт за ранніми строками.
2. Визначити критичний шлях і загальний час виконання комплексних робіт.
3. Резерви часу для некритичних робіт.
4. Отримати дані з використанням табличного методу.
5. Прийнявши до уваги, що одна робота виконується однією бригадою і роботи досить однотипні, проаналізувати показники використання бригад.
6. Запропонувати варіанти поліпшення сітьового графіка, який дозволяє покращити використання робочої сили (підтвердити розрахунком тих же показників).

Таблиця 12.3

Структурна таблиця виконання комплексу робіт

Варіант 1

Робота (a_i)	Опирається на:	Термін виконання (t_i)
a_1	-	15
a_2	a_1	25
a_3	a_1; a_2	10
a_4	a_1; a_2	15
a_5	a_1; a_3	20
a_6	a_4; a_5	25
a_7	-	15
a_8	a_7; a_1	15
a_9	a_6; a_8	20
a_{10}	a_3; a_9	15

Варіант 2

Робота (a_i)	Опирається на:	Термін виконання (t_i)
a_1	-	15
a_2	a_1	10
a_3	a_2	15
a_4	a_1; a_2	25
a_5	a_3; a_4	20
a_6	-	15
a_7	a_5; a_2	10
a_8	a_5; a_1	15
a_9	a_6	20
a_{10}	a_8; a_9	25

Варіант 3

Робота (a_i)	Опирається на:	Термін виконання (t_i)
a_1	-	20
a_2	a_1	35
a_3	-	30
a_4	a_2; a_3	20
a_5	a_3	25
a_6	a_1; a_2	15
a_7	-	20
a_8	a_3; a_4	25
a_9	a_6; a_8	15
a_{10}	a_7	15

Контрольні питання:

1. Призначення та галузі застосування сітьового планування і управління.
2. Часові параметри сітьових графіків.
3. Побудова та аналіз сітьових графіків типу «роботи – зв'язки» - часовий графік виконання робіт.
4. Побудова та аналіз сітьових графіків типу «роботи – зв'язки» - табличний метод.

Література [1, 2, 6, 8, 9, 10]

Рекомендована література

Базова:

1. Алесинская Т.В. Учебное пособие по решению задач по курсу "Экономико-математические методы и модели". Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2002, 153 с.
2. С.А. Баркалов, В.Н. Бурков, П.Н. Курочка, Н.Н. Образцов. Задачи управления материально-техническим снабжением в рыночной экономике. - М.: ИПУ РАН, 2000. –58 с.
3. Бауерсокс Д.Дж., Клосс Д.Дж. Логистика: интегрированная цепь поставок / Д.Дж. Бауерсокс, Д.Дж. Клосс // Пер. с англ. – М.: ЗАО «Олимп-Бизнес», 2001. – 640 с.
4. Дыбская В.В. Логистика для практиков. Эффективные решения в складировании и грузопереработке / В.В. Дыбская // М.: ВИНИТИ РАН, 2002.
5. Логистика в сфере материальных услуг (На примере снабженческо-заготовительных и транспортных услуг). 2-е изд. испр. и перераб. Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. 188 с.
6. Лубенцова В.С. Математические модели и методы в логистике: учеб. пособие / Под ред. В.П. Радченко // Самара: Самарский гос.техн. университет, 2008. –157 с.
7. Мешкова Л. Л., Белоус И. И., Фролов Н. М. Логистика в сфере материальных услуг (На примере снабженческо-заготовительных и транспортных услуг). 2-е изд. испр. и перераб. // Тамбов: Изд-во Тамб. гос. техн. ун-та, 2002. 188 с.
8. Мищенко А.В. Методы управления инвестициями в логистических системах: Учеб. пособие. — М.: ИНФРА-М, 2009. — 363 с. — (Высшее образование).
9. Модели и методы теории логистики: учеб. пособие 2-е изд. / Под ред. В.С. Лукинского // СПб.: Питер, 2008. – 448 с.
10. Мур Дж., Уэдерфорд Л.Р. Экономическое моделирование в Microsoft Exel. 6-изд. / Пер с англ. – М.: Вильямс, 2004. 1024 с.
11. Моделирование и симуляция логистических систем / Ю.И. Толуев, С.И. Планковский / – Курс лекций для высших технических учебных заведений. – Киев: «Миллениум», 2009. – 85 с.
12. Плоткин Б.К., Делюкин Л.А. Экономико-математические методы и модели в логистике: Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГУЭФ, 2010. – 96 с.
13. Практикум по логистике: Учеб. пособие. — 2-е изд., перераб. И доп. / Под ред. Б.А.Аникина. — М.: ИНФРА-М, 2006.— 276 с.
14. Сергеев В. И., Григорьев М. Н., Уваров С. А. Логистика: информационные системы и технологии: Учебно-практическое пособие. - М.: Издательство «АльфаПресс», 2008. - 608 с.
15. Системний анализ в логистике: Учебник / Л.Б. Миротин, Ы.З. Ташбаев- М.: Зкзамен, 2002. - 480 с.
16. Фомин г. П. Математические методы и модели в коммерческой деятельности: Учебник. — 2-е изд., перераб. и доп. — М.: Финансы и статистика, 2005. — 616 с.
17. Хазанова Л.Э. Логистика: Методы и модели управления материальными потоками: Учебник. – М.: Издательство БЕК, 2003. – 120 с.

Допоміжна:

18. Гаджинский А.М. Современный склад. Организация, технологии, управление и логистика: Учеб-практическое пособие. – М.: ТК Велби, Изд-во Проспект, 2005. – 176 с.
19. Данилюк М.О., Лещій В.П. Теорія і практика процесно-орієнтованого управління витратами: Наукове видання. - Івано-Франківськ : Місто НВ, 2002- 248 с.
20. Джонсон Дж. С, Вуд Д.Ф., Вордлоу Д.Л., Мзрфи-мл. П.Р. Современная логистика. - М.: Изд. дом "Вильямс", 2002. - 624 с.
21. Крикавський Є.В. Логістичне управління: Підручник. - Львів: Видавництво Нац. ун-ту "Львівська політехніка", 2005. - 684 с.
22. Лайсонс К., Джиллингем М. Управление закупочной деятельностью и цепью поставок: Пер. с англ. - М.: ИНФРА-М, 2005. - 798 с.

23. Логистика автомобильного транспорта: Учеб пособие / В.И.Лукинский, В.И. Бережной, В.И.Бережная и др. – М. Финансы и статистика. 2004. – 268 с.
24. Родионов А.Р., Родионов Р.А. Логистика: нормирование сбытовых запасов и оборотных средств предприятия. – Учеб пособие. – М.: Дело, 2002. - 416 с.
25. Сергеев В.И., Сергеев И.В. Логистические цепи мониторинга цепей поставок: Учеб. пособие. - М.: ИНФРА, 2003. - 172 с.
26. Скоробогатова Т.Н. Логистика: Учебное пособие: 2-е изд.– Симферополь: ООО «ДиАйПи», 2005.– 116 с.
27. Смиричинський В.В., Смиричинський А.В. Основи логістичного менеджменту: Навч. посібник. - Тернопіль: Економічна думка, 2000. - 240 с.
28. Таньков К.М., Тридід О.М., Колодизева Т.О. Виробнича логістика: Навч посібник. - Харків: ВД "ІНЖЕК", 2004. - 352 с.
29. Уотерс Д. Логистика. Управление цепью поставок: Пер. с англ. - М.: ЮНИТИ ДАНА, 2003: - 503с. - (Серия "Зарубежный учебник").
30. Чейз Р.Б., Зквилайн Н.Дж.,Якобс Р.Ф. Производственннй и операционни: менеджмент: 8-е изд. Пер. с англ.: М.: Издательский дом "Вильямс", 2003. - 704 с.

Інформаційні ресурси

1. Виконання курсової роботи в програмних продуктах Microsoft Word і Microsoft Excel.
2.Використання програмного забезпечення Mercs.Exe та Floid.Exe для виконання практичних завдань та курсової роботи.